LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

15 kwietnia 2004 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Okręgi styczne do prostych AC i BC odpowiednio w punktach A i B przechodzą przez punkt D i przecinają się po raz drugi w punkcie E. Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu C względem symetralnej odcinka AB. Wykazać, że punkty D, E i F leżą na jednej prostej.

2. Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, przyjmującym dla pewnych dwóch różnych liczb całkowitych wartości względnie pierwsze. Dowieść, że istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych, dla których wielomian W przyjmuje wartości parami względnie pierwsze.

3. W pewnym turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geqslant 3$). Każdy grał z każdym dokładnie jeden raz, nie było remisów. Trójelementowy zbiór zawodników nazwiemy *trójką remisową*, jeśli można tak ponumerować tych trzech zawodników, że pierwszy wygrał z drugim, drugi z trzecim, a trzeci z pierwszym. Wyznaczyć największą liczbę trójek remisowych, jaka mogła się pojawić w turnieju.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.

LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

16 kwietnia 2004 r. (drugi dzień zawodów)

4. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to

$$\sqrt{2(a^2+b^2)}+\sqrt{2(b^2+c^2)}+\sqrt{2(c^2+a^2)} \geqslant \sqrt{3(a+b)^2+3(b+c)^2+3(c+a)^2}.$$

5. Wyznaczyć największą liczbę prostych w przestrzeni, przechodzących przez ustalony punkt i takich, że każde dwie przecinają się pod jednakowym kątem.

6. Dana jest liczba całkowita $m>1$. Nieskończony ciąg liczb całkowitych $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony przez warunki

$$x_i = \begin{cases} 2^i & \text{dla } i<m, \\ x_{i-1}+x_{i-2}+\ldots+x_{i-m} & \text{dla } i \geqslant m. \end{cases}$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną k, dla której istnieje k kolejnych wyrazów tego ciągu podzielnych przez m.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.