LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (11 września 2004 r. – 11 października 2004 r.)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 = yz+1 \\ y^2 = zx+2 \\ z^2 = xy+4 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n>1$, dla których wartość sumy $2^2+3^2+\ldots+n^2$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku naturalnym.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC. Punkt F leży na odcinku DE, przy czym

$$\frac{EF}{FD} = \frac{AD}{DB}\,.$$

Wykazać, że proste CF i AE są prostopadłe.

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz dodatnie liczby rzeczywiste a, b. Wyznaczyć największą możliwą wartość sumy

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

gdy $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $y_1,y_2,\ldots,y_n$ są liczbami z przedziału $\langle 0;1\rangle$, spełniającymi warunki

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant a\,, \qquad y_1+y_2+\ldots+y_n \leqslant b.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

11 października 2004 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

II seria (12 października 2004 r. – 10 listopada 2004 r.)

5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a okręgi wpisane w trójkąty ABC i BCD mają równe promienie. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że także okręgi wpisane w trójkąty CDA i DAB mają równe promienie.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełniający równanie

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

7. Trzy sfery, parami styczne zewnętrznie, są styczne do pewnej płaszczyzny w punktach A, B, C. Znając długości odcinków $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, obliczyć promienie tych sfer.

8. Na okręgu jest umieszczonych n lampek; każda może być włączona albo wyłączona. Wykonujemy serię ruchów; w każdym ruchu wybieramy k kolejnych lampek i zmieniamy ich stan: wyłączone włączamy, a włączone wyłączamy (liczba k nie zmienia się w trakcie tego postępowania). Na początku wszystkie lampki są wyłączone.

Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $k \leqslant n$, dla których jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną lampką włączoną.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 listopada 2004 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (11 listopada 2004 r. – 10 grudnia 2004 r.)

9. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, dla których ciąg (x_n) określony wzorami

$$x_0 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = \frac{1+ax_n}{a-x_n} \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

spełnia warunek $x_{n+8} = x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

10. Spośród wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru n-elementowego X losujemy kolejno ze zwracaniem trzy zbiory A, B, C. Za każdym razem wylosowanie każdego spośród 2^n podzbiorów zbioru X jest jednakowo prawdopodobne. Wyznaczyć najbardziej prawdopodobną liczbę elementów zbioru $A \cap B \cap C$.

11. Okrąg o środku I jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$, przy czym punkt I nie leży na prostej AC. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E oraz prostopadła do prostej BD przecina proste AI, CI odpowiednio w punktach P, Q. Wykazać, że $PE = EQ$.

12. Dane są funkcje

$$f(x) = 2^x \quad \text{oraz} \quad g(x) = f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$$

(siedmiokrotna iteracja funkcji f). Rozstrzygnąć, czy liczba $g(3) - g(0)$ jest podzielna przez liczbę $g(2) - g(0)$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 grudnia 2004 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`