LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2005 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których

$$n^n + 1 \quad \text{oraz} \quad (2n)^{2n} + 1$$

są liczbami pierwszymi.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC. Wykazać, że jeżeli

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD\,,$$

to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

3. W przestrzeni danych jest n punktów ($n \geqslant 2$), z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Niektóre z tych punktów zostały połączone odcinkami. Niech K będzie liczbą poprowadzonych odcinków ($K \geqslant 1$), a T liczbą powstałych trójkątów. Udowodnić, że

$$9T^2 < 2K^3\,.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.

LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

26 lutego 2005 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest wielomian $W(x)=x^2+ax+b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek:

Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p.

Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której

$$W(m)=W(m+1)=0\,.$$

5. Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD>60^\circ$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD, przy czym $\sphericalangle ECF=\sphericalangle ABD$. Proste CE i CF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że

$$\frac{PQ}{EF}=\frac{AB}{BD}\,.$$

6. Liczby a, b, c należą do przedziału $\langle 0;1\rangle$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant 2\,.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.