LVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2005 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których

$$n^n+1 \quad \text{oraz} \quad (2n)^{2n}+1$$

są liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie

Niech $a \geqslant 2$, $m \geqslant 1$ będą liczbami całkowitymi. Wykażemy najpierw, że jeśli liczba m ma dzielnik nieparzysty większy od 1, to liczba a^m+1 jest złożona. Istotnie: jeśli l jest dzielnikiem nieparzystym liczby m, to $m=ld$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej d oraz

$$a^m+1=(a^d)^l+1=(a^d+1)\cdot((a^d)^{l-1}-(a^d)^{l-2}+\ldots-a^d+1).$$

Z powyższego wzoru wynika, że liczba a^d+1 jest dzielnikiem liczby a^m+1. Dla $l>1$ dzielnik ten jest większy od 1 i mniejszy od a^m+1. Zatem liczba a^m+1 jest złożona.

Liczba $n=1$ spełnia warunki zadania: liczby $1^1+1=2$, $2^2+1=5$ są liczbami pierwszymi. Załóżmy więc w dalszej części rozumowania, że $n \geqslant 2$.

Jeśli liczba n^n+1 jest liczbą pierwszą, to n nie ma dzielników nieparzystych większych od 1. Stąd wynika, że $n=2^k$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k. Wówczas

$$n^n+1=2^{k\cdot 2^k}+1 \quad \text{oraz} \quad (2n)^{2n}+1=2^{(k+1)\cdot 2^{k+1}}+1. \tag{1}$$

Dla $k \geqslant 2$ co najmniej jedna z liczb $k\cdot 2^k$, $(k+1)\cdot 2^{k+1}$ ma dzielnik nieparzysty większy od 1, a więc co najmniej jedna z liczb (1) jest złożona. Wobec tego musi być $k=1$, czyli $n=2$.

Pozostało upewnić się, że liczba $n=2$ spełnia warunki zadania: liczby $2^2+1=5$ oraz $4^4+1=257$ są liczbami pierwszymi.

Odp.: $n=1$ lub $n=2$.

Zadanie **2.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC. Wykazać, że jeżeli

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD,$$

to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Rozwiązanie

Oznaczmy: $\alpha = \sphericalangle BAD$.

Jeśli $\alpha = 90^\circ$, to punkty B, M, D leżą na jednej prostej. Wtedy punkty A i C są symetryczne względem prostej BD. Stąd $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 90^\circ$, czyli na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

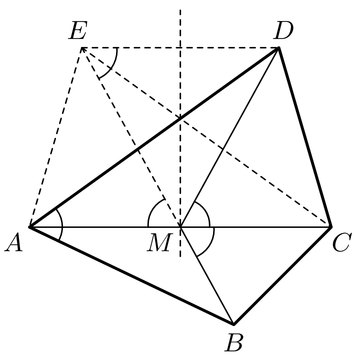
W dalszym ciągu przyjmijmy, że $\alpha \neq 90^\circ$. Niech E będzie punktem symetrycznym do punktu D względem symetralnej odcinka AC (rys. 1, 2). Wówczas $\sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD = \sphericalangle AME$, skąd wynika, że punkty B, M, E leżą na jednej prostej. Proste AC i ED są równoległe. Zatem gdy $\alpha < 90^\circ$ (rys. 1), to

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = \sphericalangle BED\,;$$

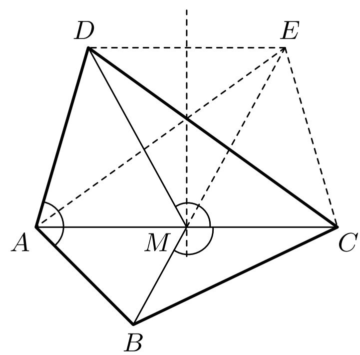
natomiast jeśli $\alpha > 90^\circ$ (rys. 2), to

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = 180^\circ - \sphericalangle BMA = 180^\circ - \sphericalangle BED\,.$$

W obu przypadkach otrzymana równość oznacza, że punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu. Ponadto czworokąt o wierzchołkach A, C, D, E jest trapezem równoramiennym, a więc również punkty A, C, D, E leżą na jednym okręgu. Zatem punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu, co należało wykazać.



rys. 1



rys. 2

Zadanie **3.** W przestrzeni danych jest n punktów ($n \geqslant 2$), z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Niektóre z tych punktów zostały połączone odcinkami. Niech K będzie liczbą poprowadzonych odcinków ($K \geqslant 1$), a T liczbą powstałych trójkątów. Udowodnić, że

$$9T^2 < 2K^3\,.$$

Rozwiązanie

Ponumerujmy liczbami od 1 do m te punkty, z których wychodzi co najmniej jeden odcinek i przyjmijmy, że z punktu o numerze i ($i = 1, 2, \ldots, m$) wychodzi dokładnie k_i odcinków. Wtedy $k_i > 0$. Oznaczmy ponadto przez t_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) liczbę tych trójkątów, których jednym z wierzchołków jest punkt o numerze i. Wówczas

$$(1) \qquad k_1 + k_2 + \ldots + k_m = 2K \quad \text{oraz} \quad t_1 + t_2 + \ldots + t_m = 3T\,.$$

Zbiór A_i tych punktów, które zostały połączone odcinkiem z punktem o numerze i zawiera dokładnie k_i elementów. Ponadto trójkątów mających wierzchołek w punkcie o numerze i jest tyle samo, ile poprowadzonych odcinków o wierzchołkach w zbiorze A_i. Zatem

$$(2)\qquad t_i \leqslant \binom{k_i}{2} = \frac{k_i^2 - k_i}{2} < \frac{k_i^2}{2}\,.$$

Z drugiej strony, liczba tych odcinków jest mniejsza niż liczba wszystkich poprowadzonych odcinków. Wobec tego

$$(3)\qquad t_i < K\,.$$

Mnożąc stronami nierówności (2) i (3) uzyskujemy $t_i^2 < \frac{1}{2}k_i^2 K$. Stąd oraz z równości (1) otrzymujemy

$$3T = \sum_{i=1}^{m} t_i < \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i \cdot \sqrt{K}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{i=1}^{m} k_i = \frac{2K\sqrt{K}}{\sqrt{2}}\,.$$

Podnosząc ostatnią nierówność stronami do kwadratu dostajemy tezę.

(wp)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

26 lutego 2005 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Dany jest wielomian $W(x)=x^2+ax+b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek:
Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p.
Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której

$$W(m)=W(m+1)=0\,.$$

Rozwiązanie

Warunek $W(m)=W(m+1)=0$ oznacza, że $W(x)=(x-m)(x-m-1)$, czyli $W(x)=x^2-(2m+1)x+m^2+m$. Należy zatem wykazać, że istnieje taka liczba całkowita m, że

$$a=-2m-1 \quad \text{oraz} \quad b=m^2+m\,.$$

Ustalmy liczbę pierwszą p. Wówczas dla pewnej liczby całkowitej k liczby

$$A=W(k)=k^2+ak+b\,,$$
$$B=W(k+1)=k^2+(a+2)k+(a+b+1)\,.$$

są podzielne przez p. Przez p dzielą się więc kolejno następujące liczby:

$$C=B-A=2k+(a+1)\,,$$
$$D=2A-kC=(a-1)k+2b\,,$$
$$E=(a-1)C-2D=a^2-4b-1\,.$$

Liczba E jest wyznaczona przez współczynniki wielomianu W i nie zależy od k. Przeprowadzając to rozumowanie dla każdej liczby pierwszej p stwierdzamy, że liczba E jest podzielna przez każdą liczbę pierwszą p i w konsekwencji $E=0$. Stąd wynika, że liczba a jest nieparzysta, tzn. $a=-2m-1$ dla pewnej liczby całkowitej m, oraz $b=\frac{1}{4}(a^2-1)=m^2+m\,.$

Zadanie **5.** Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD>60^\circ$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD, przy czym $\sphericalangle ECF=\sphericalangle ABD$. Proste CE i CF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że

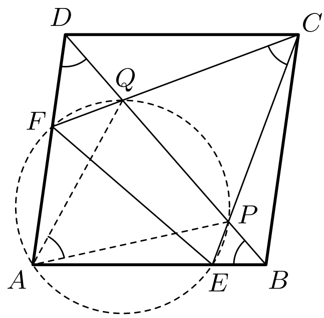
$$\frac{PQ}{EF}=\frac{AB}{BD}\,.$$

Rozwiązanie

Z równości $\sphericalangle FDQ=\sphericalangle PCQ$ wynika, że trójkąty FDQ i PCQ są podobne. Ponieważ punkty A i C są symetryczne względem prostej BD, więc trójkąty PCQ i PAQ są przystające oraz

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle CPQ = \sphericalangle DFQ = 180^\circ - \sphericalangle AFQ\,.$$

Równość ta oznacza, że punkty A, P, Q, F leżą na jednym okręgu. Podobnie dowodzimy, że punkty A, P, Q, E leżą na jednym okręgu. Istnieje więc okrąg przechodzący przez punkty A, P, Q, E i F.



Z zależności $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle CFE$ wnioskujemy, że trójkąty CPQ i CFE są podobne. Analogicznie uzyskujemy podobieństwo trójkątów DQF i DAP. Ponadto podobne są trójkąty PAQ i ABQ. Stąd

$$\frac{EF}{PQ} = \frac{FC}{PC} = \frac{FQ+AQ}{PC} = \frac{FQ}{PA} + \frac{AQ}{PA} = \frac{DQ}{AD} + \frac{BQ}{AB} = \frac{BD}{AB}\,,$$

co należało wykazać.

Zadanie **6.** Liczby a, b, c należą do przedziału $\langle 0;1\rangle$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leqslant 2\,.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że dla dowolnych liczb a, b, c należących do przedziału $\langle 0;1\rangle$ zachodzi nierówność

(1) $$\frac{a}{bc+1} \leqslant \frac{2a}{a+b+c}\,.$$

Istotnie: jeśli $a=0$, to powyższa nierówność jest spełniona. Dla $a>0$ zależność (1) jest równoważna nierówności $a+b+c \leqslant 2bc+2$, którą można zapisać jako

$$a \leqslant 1 + bc + (b-1)(c-1)\,.$$

Ostatnia nierówność jest spełniona — wynika ona bezpośrednio z zależności $a \leqslant 1$, $0 \leqslant bc$, $0 \leqslant (b-1)(c-1)$. To kończy dowód własności (1).

Analogicznie dowodzimy, że

(2) $$\frac{b}{ca+1} \leqslant \frac{2b}{a+b+c} \quad \text{oraz} \quad \frac{c}{ab+1} \leqslant \frac{2c}{a+b+c}\,.$$

Dodając stronami nierówności (1) oraz (2) uzyskujemy tezę.

(wp)