LVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

13 kwietnia 2005 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Wyznaczyć wszystkie trójki (x,y,n) liczb całkowitych dodatnich spełniające równanie

$$(x-y)^n = xy\,.$$

Rozwiązanie

Dla $n=1$ podane równanie ma postać $(x+1)(y-1)=-1$, więc nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich. Przyjmijmy zatem, że $n \geqslant 2$.

Niech $z=x-y$. Dane równanie przybiera postać $x^2-xz=z^n$. Po przemnożeniu przez 4 i prostym przekształceniu uzyskujemy

$$(2x-z)^2 = z^2(1+4z^{n-2})\,. \tag{1}$$

Stąd wynika, że czynnik $1+4z^{n-2}$ jest kwadratem liczby całkowitej. Ponieważ jest to liczba nieparzysta większa od 1, więc dla pewnej liczby całkowitej dodatniej t mamy $1+4z^{n-2}=(2t+1)^2$, czyli

$$z^{n-2} = t(t+1)\,.$$

Dla $n=2$ uzyskujemy $1=t(t+1)$, co nie może być spełnione, gdyż liczba $t(t+1)$ jest parzysta dla każdej liczby całkowitej t. Zatem jeśli $n=2$, to dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Dla $n=3$ mamy $z=t(t+1)$. Wstawiając to wyrażenie do równania (1) wyznaczamy niewiadomą x. Po kilku przekształceniach otrzymujemy

$$x=t(t+1)^2 \quad \text{lub} \quad x=-t^2(t+1)\,.$$

Ponieważ $t>0$, a x jest liczbą dodatnią, to druga z wyznaczonych wartości x odpada. Ponadto $y=x-z=t(t+1)^2-t(t+1)=t^2(t+1)$. Znaleźliśmy w ten sposób następujące trójki:

$$(x,y,n)=(t(t+1)^2\,,\, t^2(t+1)\,,3)\,, \quad \text{gdzie } t=1,2,3,\ldots\,. \tag{2}$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że są one rozwiązaniami danego równania.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek $n\geqslant 4$. Ponieważ liczby t, $t+1$ są względnie pierwsze, a ich iloczyn jest $(n-2)$-gą potęgą liczby całkowitej dodatniej, to każda z tych liczb musi być $(n-2)$-gą potęgą liczby całkowitej dodatniej. Jednak dla $n\geqslant 4$ nie istnieją dwie kolejne liczby całkowite dodatnie będące $(n-2)$-gimi potęgami liczb całkowitych. Zatem jeśli $n\geqslant 4$, to dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Reasumując: dane równanie ma rozwiązanie (x,y) w liczbach całkowitych dodatnich tylko dla $n=3$. Wszystkie rozwiązania są dane wzorem (2).

Zadanie **2.** Punkty A, B, C, D leżą, w tej właśnie kolejności, na okręgu o. Punkt S leży wewnątrz okręgu o i spełnia warunki

$$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle SDA = \sphericalangle SBC\,.$$

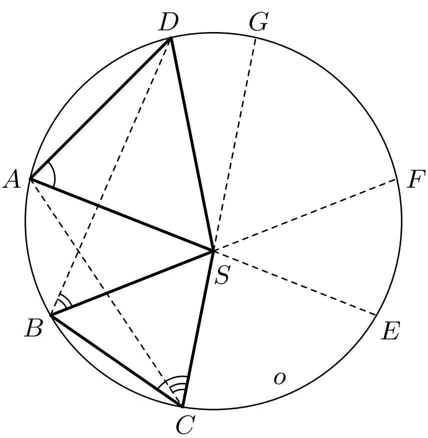
Prosta zawierająca dwusieczną kąta ASB przecina okrąg o w punktach P i Q. Dowieść, że $PS = QS$.

Rozwiązanie

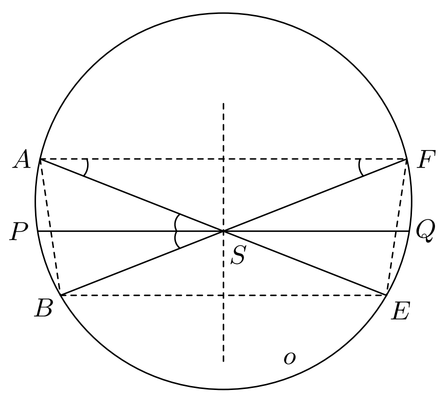
Przyjmijmy, że proste AS, BS, CS przecinają okrąg o po raz drugi odpowiednio w punktach E, F, G (rys. 1). Z danych w zadaniu równości wynika podobieństwo trójkątów ASD i CSB, a stąd

$$\frac{AS}{CS} = \frac{DS}{BS} \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BSC = \sphericalangle DSA\,,$$

więc i $\sphericalangle ASC = \sphericalangle DSB$. Równości te dowodzą, że trójkąty ASC i DSB są podobne, skąd w szczególności dostajemy $\sphericalangle ACS = \sphericalangle DBS$. Stąd wniosek, że łuki GA i FD okręgu o są równe (pisząc „łuk XY" mamy na myśli łuk biegnący wzdłuż okręgu o od punktu X do punktu Y w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Analogicznie, z równości $\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB$ wnioskujemy, że łuki GB i ED są równe. Zatem także łuki AB i EF są równe.



rys. 1



rys. 2

Czworokąt $ABEF$ jest więc trapezem równoramiennym, a punkt S jest punktem przecięcia jego przekątnych (rys. 2). Przyjmijmy, że punkt P leży na tym łuku AB okręgu o, który nie zawiera punktów C i D. Z równości

$$\sphericalangle PSA = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ASB = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle FAS + \sphericalangle AFS) = \sphericalangle FAS$$

wynika, że prosta PQ jest równoległa do prostych BE i AF. Stąd wniosek, że punkty A, P, B są odpowiednio obrazami punktów F, Q, E w symetrii względem symetralnej odcinków AF i BE. Zatem $PS = QS$.

Zadanie **3.** W kwadratowej tablicy o wymiarach $2n \times 2n$, gdzie n jest liczbą naturalną, znajduje się $4n^2$ liczb rzeczywistych o sumie równej 0 (na każdym polu tablicy jedna liczba). Wartość bezwzględna każdej z tych liczb jest nie większa od 1. Dowieść, że wartość bezwzględna sumy wszystkich liczb z pewnego rzędu (poziomego lub pionowego) nie przekracza n.

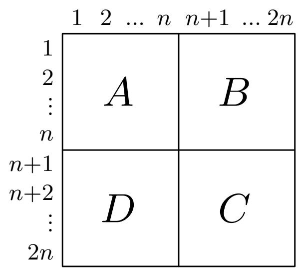
Rozwiązanie

Ponumerujmy wiersze i kolumny danej tablicy liczbami $1, 2, \ldots, 2n$.

Niech $r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$ będą sumami liczb napisanych w wierszach o numerach $1, 2, \ldots, 2n$, a $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ sumami liczb znajdujących się w kolumnach o numerach $1, 2, \ldots, 2n$. Zmieniając numerację wierszy oraz kolumn możemy założyć, że $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{2n}$ oraz $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_{2n}$.

Oznaczmy przez A, B, C, D sumy liczb w czterech ćwiartkach tablicy, jak pokazuje rysunek 3.

Wówczas $A+B+C+D=0$, skąd wynika, że w ciągu (A, B, C, D, A) istnieją dwie kolejne liczby, z których jedna jest nieujemna, a druga niedodatnia. Przyjmijmy na przykład, że $AB \leqslant 0$. Rozumowanie w pozostałych przypadkach jest analogiczne.



rys. 3

Liczby A i B powstały z sumowania n^2 liczb rzeczywistych o wartości bezwzględnej nie większej niż 1, a więc $|A| \leqslant n^2$ oraz $|B| \leqslant n^2$. Jedna z liczb A, B jest nieujemna, a druga niedodatnia, więc $|A+B| \leqslant \max(|A|, |B|) \leqslant n^2$. Stąd otrzymujemy również $|C+D| = |A+B| \leqslant n^2$.

Jeżeli $r_n \geqslant 0$, to liczby $r_1, r_2, \ldots, r_n$ są nieujemne. Wtedy ich suma $A+B$ jest też nieujemna, skąd uzyskujemy $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = A + B \leqslant n^2$. Zatem co najmniej jedna z (nieujemnych) liczb $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nie przekracza n.

Jeżeli natomiast $r_n < 0$, to liczby $r_{n+1}, r_{n+2}, \ldots, r_{2n}$ są ujemne i ich suma wynosi $C+D$. Wtedy $|r_{n+1}| + |r_{n+2}| + \ldots + |r_{2n}| = |C+D| \leqslant n^2$. Stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb $|r_{n+1}|, |r_{n+2}|, \ldots, |r_{2n}|$ nie przekracza n.

To dowodzi zadania.

(*wp*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2005 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Dana jest liczba rzeczywista $c > -2$. Dowieść, że jeżeli liczby x_1, $x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ są dodatnie oraz

$$\sqrt{x_1^2+cx_1x_2+x_2^2}+\sqrt{x_2^2+cx_2x_3+x_3^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+cx_nx_1+x_1^2}= \\ =\sqrt{c+2}\,(x_1+x_2+\ldots+x_n),$$

to $c=2$ lub $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$a_i=\sqrt{c+2}\,(x_i+x_{i+1}) \quad \text{oraz} \quad b_i=2\sqrt{x_i^2+cx_ix_{i+1}+x_{i+1}^2} \quad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,n,$$

przyjmując $x_{n+1}=x_1$. Liczby a_i są dodatnie. Redukując wyrazy podobne otrzymujemy zależność $a_i^2-b_i^2=(c-2)(x_i-x_{i+1})^2$. Stąd oraz z danej w treści zadania równości dostajemy

$$0=\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-b_i^2}{a_i+b_i}=(c-2)\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{a_i+b_i}\,.$$

Prawa strona powyższej równości jest równa 0 jedynie wtedy, gdy $c=2$ lub $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Zadanie **5.** Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech $m=4k^2-5$. Wykazać, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, że każdy wyraz ciągu (x_n) określonego wzorami

$$x_1=a\,,\ x_2=b\,, \quad x_{n+2}=x_{n+1}+x_n \quad \text{dla} \ \ n\geqslant 1$$

jest względnie pierwszy z liczbą m.

Rozwiązanie

Wykażemy, że warunki zadania spełniają liczby $a=1$, $b=2k^2+k-2$. Udowodnimy indukcyjnie, że $x_n\equiv b^{n-1} \pmod m$ dla $n=1,2,3,\ldots$. Dla $n=1$ i $n=2$ zależność ta jest oczywiście spełniona.

Korzystając ze związku $4k^2\equiv 5 \pmod m$ uzyskujemy kolejno:

$$2b=4k^2+2k-4\equiv 2k+1 \pmod m\,,$$
$$4b^2\equiv 4k^2+4k+1\equiv 4k+6\equiv 4b+4 \pmod m\,.$$

Liczby 4 i m są względnie pierwsze, więc $b^2\equiv b+1 \pmod m$. Stąd i z założenia indukcyjnego dostajemy

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n\equiv b^n+b^{n-1}\equiv b^{n+1} \pmod m\,.$$

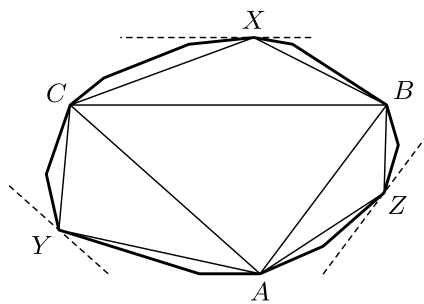
Dowód indukcyjny jest zakończony.

Z uzyskanej w tym dowodzie zależności $b^2 \equiv b+1 \pmod{m}$ wynika, że liczby b i m są względnie pierwsze. Skoro zaś $x_n \equiv b^{n-1} \pmod{m}$, wnosimy stąd, że (dla każdego n) liczby x_n i m są względnie pierwsze.

Zadanie **6.** Udowodnić, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 zawiera sześciokąt wypukły o polu nie mniejszym niż 3/4.

Rozwiązanie

Spośród wierzchołków danego wielokąta $\mathcal{W}$ wybieramy trzy A, B i C będące wierzchołkami trójkąta o największym polu, równym s. Niech X będzie punktem wielokąta $\mathcal{W}$, leżącym po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt A i oddalonym najdalej od prostej BC (rys. 4). Analogicznie definiujemy punkty Y i Z.



rys. 4

Wykażemy, że pole sześciokąta $AZBXCY$ jest nie mniejsze niż 3/4, co zakończy rozwiązanie zadania.

Przez punkty A, B i C poprowadźmy proste równoległe odpowiednio do prostych BC, CA i AB wyznaczające trójkąt o wierzchołkach D, E, F (rys. 5). Z faktu, iż trójkąt ABC ma największe pole spośród wszystkich trójkątów o wierzchołkach w wierzchołkach wielokąta $\mathcal{W}$ wynika, że wielokąt $\mathcal{W}$ jest zawarty w trójkącie DEF.

Przez punkty X, Y, Z prowadzimy proste równoległe odpowiednio do prostych BC, CA, AB przecinające boki trójkąta DEF w punktach K, L, M, N, P, Q, jak na rysunku 5. Z określenia punktów X, Y, Z wynika, że wielokąt $\mathcal{W}$ jest zawarty w sześciokącie o wierzchołkach K, L, M, N, P, Q.

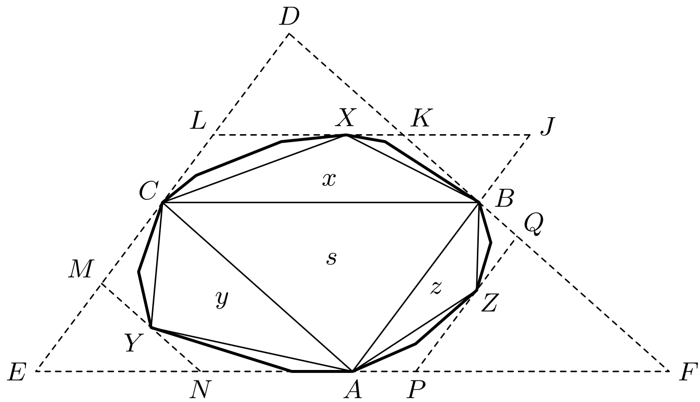
Oznaczmy przez s pole trójkąta ABC. Wówczas każdy z trójkątów BCD, CAE i ABF ma pole równe s. Niech ponadto x, y, z oznaczają odpowiednio pola trójkątów BCX, CAY i ABZ. Należy wykazać, że $x+y+z+s \geqslant 3/4$.

Niech J będzie takim punktem, że czworokąt $CBJL$ jest równoległobokiem. Wówczas trójkąty CBD i JKB są podobne. Oznaczając przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$, mamy zależności

$$\frac{[JKB]}{[CBD]} = \left(\frac{KB}{BD}\right)^2 = \left(\frac{[CBK]}{[CBD]}\right)^2 = \left(\frac{[CBX]}{[CBD]}\right)^2 = \frac{x^2}{s^2}\,,$$

czyli $[JKB]=x^2/s$. Stąd otrzymujemy

$$[CBKL]=[CBJL]-[JKB]=2x-[JKB]=2x-\frac{x^2}{s}\,.$$



rys. 5

Analogicznie wyrażamy pola trapezów $ACMN$ i $BAPQ$. Zatem pole sześciokąta o wierzchołkach K, L, M, N, P, Q wynosi

$$s+\left(2x-\frac{x^2}{s}\right)+\left(2y-\frac{y^2}{s}\right)+\left(2z-\frac{z^2}{s}\right)=s+2x+2y+2z-\frac{x^2+y^2+z^2}{s}\,.$$

Ponieważ sześciokąt ten zawiera dany wielokąt $\mathcal{W}$, więc

$$s+2x+2y+2z-\frac{x^2+y^2+z^2}{s}\geqslant 1\,.$$

Wystarczy zatem wykazać, że

$$s+x+y+z\geqslant\frac{3}{4}\left(s+2x+2y+2z-\frac{x^2+y^2+z^2}{s}\right).$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez $12s$ oraz redukując wyrazy podobne uzyskujemy jej równoważną postać:

$$(3x-s)^2+(3y-s)^2+(3z-s)^2\geqslant 0\,,$$

a ta ostatnia nierówność jest oczywiście spełniona.

(wp)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`