LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

I seria (12 września 2005 r. – 10 października 2005 r.)

1. Wyznaczyć wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których liczba 2^n+105 jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych nieujemnych x równanie $\sqrt[5]{x} = \left[\, \sqrt[5]{3x}\, \right]$.

Uwaga: $[t]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od t.

3. Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB, a punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AC i BC. Wykazać, że pole czworokąta $EOFC$ jest równe połowie pola trójkąta ABC.

4. Uczestnicy zawodów matematycznych rozwiązywali sześć zadań, każde oceniane jedną z ocen 6, 5, 2, 0. Okazało się, że dla każdej pary uczestników A, B można wskazać takie dwa zadania, że w każdym z nich A uzyskał inną ocenę niż B.

Wyznaczyć największą liczbę uczestników, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2005 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (11 października 2005 r. – 7 listopada 2005 r.)

5. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Rozważamy funkcje

$$f(x) = ax + b|x| \qquad \text{oraz} \qquad g(x) = ax - b|x|.$$

Wykazać, że jeśli

$$f(f(x)) = x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x,$$

to również

$$g(g(x)) = x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x.$$

6. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości przecinają się w punkcie H. Prosta przechodząca przez H przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Prosta przechodząca przez H i prostopadła do prostej DE przecina prostą AB w punkcie F. Dowieść, że

$$\frac{DH}{HE} = \frac{AF}{FB}.$$

7. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, że $a + b + c = p + 1$ oraz liczba $a^3 + b^3 + c^3 - 1$ jest podzielna przez p. Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1.

8. Czworościan $ABCD$ jest opisany na kuli o środku S i promieniu 1, przy czym $SA \geqslant SB \geqslant SC$. Wykazać, że $SA > \sqrt{5}$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

7 listopada 2005 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (8 listopada 2005 r. – 5 grudnia 2005 r.)

9. Dane są nieujemne liczby całkowite $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$. Niech $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}$. Wyznaczyć liczbę nieparzystych współczynników wielomianu $P(x) = (x+1)^n$.

10. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają warunek

$$ab + bc + ca = 3\,.$$

Dowieść, że

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geqslant 9\,.$$

11. W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od 180° oraz zachodzi równość

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC\,.$$

Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD. Udowodnić, że $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$.

12. Niech a_0 będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i/2, & \text{gdy } a_i \text{ jest liczbą parzystą,} \\ 3a_i - 1, & \text{gdy } a_i \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$$

dla $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Wykazać, że jeśli n jest liczbą całkowitą dodatnią spełniającą warunek $a_n = a_0$, to $2^n > a_0$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 grudnia 2005 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-095 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej, ul. Janiszewskiego 14a, 50-370 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`