LVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(12 września 2005 r. – 5 grudnia 2005 r.)

Zadanie **1.** Wyznaczyć wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których liczba 2^n+105 jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to liczba 2^n+105 daje z dzielenia przez 3 resztę 2. Ponieważ liczba będąca kwadratem liczby całkowitej nie może dawać reszty 2 z dzielenia przez 3, więc liczba n spełniająca warunki zadania musi być parzysta.

Przyjmijmy więc, że $n=2k$ dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej k. Chcemy rozwiązać równanie $2^{2k}+105=m^2$ w liczbach całkowitych nieujemnych k i m. Równanie to przepisujemy w postaci $(m-2^k)(m+2^k)=105$.

Z uzyskanej równości wynika, że $m-2^k>0$. Oczywiście również spełniona jest nierówność $m+2^k>m-2^k$. Ponieważ $105=3\cdot 5\cdot 7$, więc wyznaczenie liczb całkowitych nieujemnych m i k spełniających zależność $(m-2^k)(m+2^k)=105$ sprowadza się do rozwiązania czterech układów równań:

$$\begin{cases} m-2^k=7 \\ m+2^k=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} m-2^k=5 \\ m+2^k=21 \end{cases} \qquad \begin{cases} m-2^k=3 \\ m+2^k=35 \end{cases} \qquad \begin{cases} m-2^k=1 \\ m+2^k=105 \end{cases}$$

Odejmując stronami pierwsze równanie od drugiego dochodzimy do wniosku, że liczba $2\cdot 2^k=2^{k+1}$ równa się 8, 16, 32 lub 104. Stąd uzyskujemy trzy możliwe wartości k; są nimi: 2, 3 lub 4. Tym samym możliwe wartości liczby n wynoszą 4, 6 lub 8.

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla uzyskanych trzech wartości n liczba 2^n+105 jest kwadratem liczby całkowitej:

$$\begin{aligned} 2^4+105=121=11^2, \\ 2^6+105=169=13^2, \\ 2^8+105=361=19^2. \end{aligned}$$

Zadanie **2.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych nieujemnych x równanie

$$\sqrt[5]{x}=\left[\,\sqrt[5]{3x}\,\right].$$

Uwaga: $[t]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od t.

Rozwiązanie

Niech x będzie liczbą spełniającą dane równanie. Wtedy liczba $y=\sqrt[5]{x}$ jest całkowita. Ponadto $y\geqslant 0$, gdyż $x\geqslant 0$. Podstawiając więc $x=y^5$ do rozpatrywanego równania otrzymujemy

$$y=\left[\,\sqrt[5]{3}\cdot y\,\right].$$

Zależność ta oznacza, że

$$y \leqslant \sqrt[5]{3}\cdot y < y+1\,.$$

Pierwsza z tych nierówności jest prawdziwa dla dowolnej liczby nieujemnej y. Druga natomiast jest równoważna nierówności

$$y < \frac{1}{\sqrt[5]{3}-1}\,. \tag{1}$$

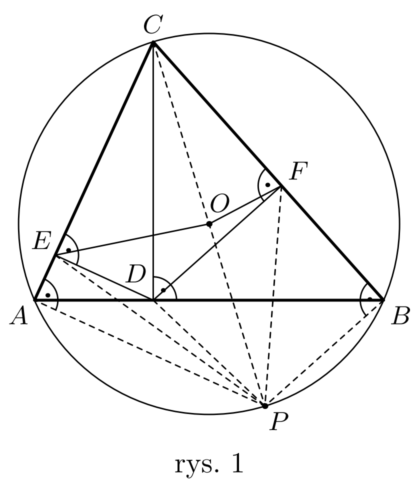
Ponieważ liczba $1/(\sqrt[5]{3}-1)$ należy do przedziału $(4,5)$, więc spośród liczb całkowitych nieujemnych tylko liczby 0, 1, 2, 3, 4 spełniają zależność (1). Tym samym niewiadoma x przyjmuje jedną z pięciu wartości: 0, 1, 2^5, 3^5 lub 4^5.

Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że każda z tych pięciu liczb spełnia wyjściowe równanie.

Zadanie **3.** Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB, a punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AC i BC. Wykazać, że pole czworokąta $EOFC$ jest równe połowie pola trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Niech P będzie punktem symetrycznym do punktu C względem punktu O (rys. 1). Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny, więc punkty A, P, B i C leżą na okręgu o środku O w tej własnie kolejności.



rys. 1

Pola trójkątów COE i POE są równe, gdyż trójkąty te mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka E, a odcinki CO i OP są równej długości. Analogicznie, pola trójkątów COF i POF są równe. Stąd otrzymujemy $[EOFC]=\frac{1}{2}\cdot[EPFC]$, gdzie symbolem $[\mathcal{F}]$ oznaczyliśmy pole figury $\mathcal{F}$.

Aby dokończyć rozwiązanie należy dowieść, że $[EPFC]=[ABC]$.

Odcinek CP jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, więc proste AP i AC są prostopadłe. Prosta DE jest prostopadła do prostej AC, więc równoległa do prostej AP. Stąd wynika, że pola trójkątów DEA i DEP są równe. Podobnie, pola trójkątów DFB i DFP są równe. Zatem

$$\begin{aligned}[EPFC] &= [EDFC]+[DEP]+[DFP] = \\ &= [EDFC]+[DEA]+[DFB]=[ABC],\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **4.** Uczestnicy zawodów matematycznych rozwiązywali sześć zadań, każde oceniane jedną z ocen 6, 5, 2, 0. Okazało się, że dla każdej pary uczestników A, B można wskazać takie dwa zadania, że w każdym z nich A uzyskał inną ocenę niż B.
Wyznaczyć największą liczbę uczestników, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie

Wykażemy, że największą liczbą uczestników, dla której taka sytuacja jest możliwa, jest 1024. W dalszym ciągu przyjmiemy, że dopuszczalnymi ocenami są liczby 0, 1, 2, 3 (zamiast 5 punktów stawiamy 4, a następnie każdą ocenę dzielimy przez 2).

Niech $P=\{0,1,2,3\}$ i rozważmy zbiór

$$X=\{(a_1,a_2,\ldots,a_6)\colon\ a_1,a_2,\ldots,a_6\in P\}.$$

Zbiór X ma oczywiście 4096 elementów. Będziemy rozważać podzbiory A zbioru X o następującej własności $(*)$:

$(*)$ jeśli $(a_1,a_2,\ldots,a_6),(b_1,b_2,\ldots,b_6)\in A$ to istnieją i,j takie, że

$$1\leqslant i,j\leqslant 6, \quad i\neq j, \quad \text{oraz} \quad a_i\neq b_i,\ a_j\neq b_j.$$

Wystarczy pokazać, że największa liczba elementów zbioru A o własności $(*)$ wynosi 1024.

Najpierw pokazujemy, że jeśli zbiór A ma własność $(*)$, to ma co najwyżej 1024 elementy. Załóżmy zatem, że mamy dany podzbiór A zbioru X mający własność $(*)$ i przypuśćmy, że ma on co najmjniej 1025 elementów. Ponieważ istnieją dokładnie 1024 ciągi długości 5 o wyrazach ze zbioru czteroelementowego P, więc z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w zbiorze A istnieją co najmniej dwa ciągi, mające te same wyrazy od pierwszego do piątego. Te ciągi różnią się więc tylko jednym wyrazem – szóstym, co jest sprzeczne z własnością $(*)$. Zatem zbiór A ma co najwyżej 1024 elementy.

Teraz pokazujemy, że istnieje zbiór A mający co najmniej 1024 elementy i mający własność $(*)$. Wystarczy mianowicie wziąć następujący zbiór:

$$A=\{(a_1,a_2,\ldots,a_6)\in X\colon\ 4\mid a_1+a_2+\ldots+a_6\}.$$

Najpierw pokazujemy, że zbiór A ma co najmniej 1024 elementy. Weźmy dowolne liczby $a_1,a_2,\ldots,a_5\in P$. Takiego wyboru możemy dokonać na 1024 sposoby. Niech r będzie resztą z dzielenia przez 4 sumy $a_1+a_2+\ldots+a_5$ i przyjmijmy $a_6=4-r$. Wtedy oczywiście $(a_1,a_2,\ldots,a_6)\in A$, a więc wskazaliśmy w zbiorze A co najmniej 1024 różne ciągi. Wreszcie pokazujemy, że zbiór A ma własność $(*)$. Przypuśćmy, że

$$(a_1,a_2,\ldots,a_6),\ (b_1,b_2,\ldots,b_6)\in A$$

oraz ciągi $(a_1,a_2,\ldots,a_6)$ i $(b_1,b_2,\ldots,b_6)$ różnią się tylko jednym wyrazem, np. wyrazem o indeksie k: $a_k\neq b_k$, gdzie $1\leqslant k\leqslant 6$ oraz $a_i=b_i$ dla $i\neq k$. Ponieważ liczby $a_1+a_2+\ldots+a_6$ i $b_1+b_2+\ldots+b_6$ są podzielne przez 4, więc ich różnica też jest podzielna przez 4. Ale

$$(a_1+a_2+\ldots+a_6)-(b_1+b_2+\ldots+b_6)=a_k-b_k.$$

Zatem liczba a_k-b_k jest podzielna przez 4. Ponieważ $a_k,b_k\in P$, więc

$$a_k-b_k\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}.$$

W zbiorze $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ jest tylko jedna liczba podzielna przez 4, mianowicie 0. Zatem $a_k=b_k$, wbrew założeniu, że ciągi $(a_1,a_2,\ldots,a_6)$ oraz $(b_1,b_2,\ldots,b_6)$ różnią się wyrazem o indeksie k. Ta sprzeczność dowodzi, że zbiór A ma własność $(*)$, co kończy dowód.

Zadanie **5.** Niech a,b będą liczbami rzeczywistymi. Rozważamy funkcje

$$f(x)=ax+b|x| \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=ax-b|x|.$$

Wykazać, że jeśli

$$f(f(x))=x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x,$$

to również

$$g(g(x))=x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x mamy

$$g(x)=ax-b|x|=-(a\cdot(-x)+b\cdot|-x|)=-f(-x).$$

Zatem dla każdej liczby rzeczywistej x otrzymujemy

$$g(g(x))=-f(-g(x))=-f(f(-x))=-(-x)=x,$$

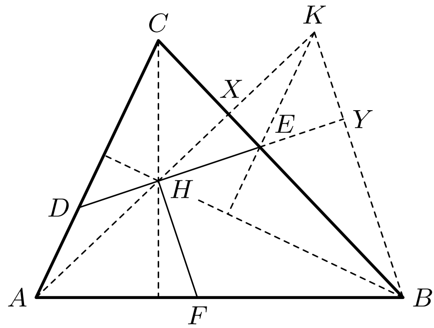
co należało udowodnić.

Zadanie **6.** W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości przecinają się w punkcie H. Prosta przechodząca przez H przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Prosta przechodząca przez H i prostopadła do prostej DE przecina prostą AB w punkcie F. Dowieść, że

$$\frac{DH}{HE}=\frac{AF}{FB}.$$

Rozwiązanie

Niech K będzie punktem przecięcia prostej AH z prostą przechodzącą przez punkt B i równoległą do prostej FH (rys. 2). Oznaczmy przez X rzut prostokątny punktu A na prostą BC, zaś przez Y punkt przecięcia prostych prostopadłych DE i BK.



rys. 2

Odcinki BX i HY są wysokościami w trójkącie BHK, a zatem prosta KE zawiera trzecią wysokość tego trójkąta. Zatem prosta KE jest prostopadła do prostej BH, czyli równoległa do prostej AC. Stąd

$$\frac{DH}{HE} = \frac{AH}{HK} = \frac{AF}{FB}\,.$$

Zadanie **7.** Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, że $a+b+c = p+1$ oraz liczba $a^3+b^3+c^3-1$ jest podzielna przez p. Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c+2abc) =$$
$$= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\,.$$

Zgodnie z warunkami zadania liczby $a+b+c$ oraz $a^3+b^3+c^3$ dają z dzielenia przez p resztę 1, a więc na mocy powyższej tożsamości liczba

$$3(a+b)(b+c)(c+a)$$

jest podzielna przez p. Skoro p jest liczbą pierwszą różną od 3, to któryś z czynników $a+b$, $b+c$ lub $c+a$ jest podzielny przez p. Przyjmijmy, bez straty ogólności, że $p \mid a+b$.

Liczby a, b, c są całkowite dodatnie, więc $0 < a+b < a+b+c = p+1$. Stąd wynika, że $a+b = p$, czyli $c = 1$.

Zadanie **8.** Czworościan $ABCD$ jest opisany na kuli o środku S i promieniu 1, przy czym $SA \geqslant SB \geqslant SC$. Wykazać, że $SA > \sqrt{5}$.

Rozwiązanie

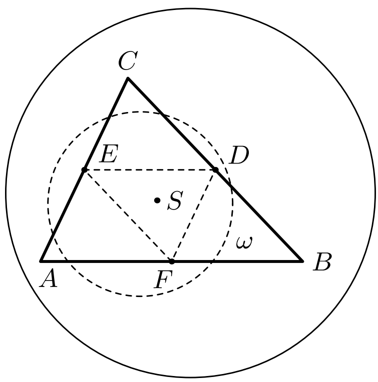
Udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat

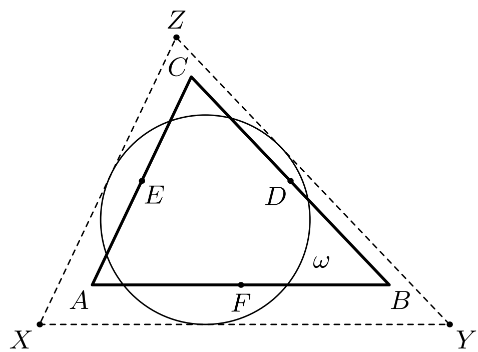
Trójkąt ABC jest zawarty w kole o promieniu R. Okrąg o promieniu r jest wpisany w trójkąt ABC. Wówczas $R \geqslant 2r$.

Dowód

Niech D, E, F będą odpowiednio środkami boków BC, CA, AB (rys. 3). Oznaczmy ponadto przez S punkt przecięcia środkowych AD, BE i CF. Rozpatrzmy dalej jednokładność o środku S i skali $-1/2$. Jednokładność ta przeprowadza punkty A, B i C odpowiednio na punkty D, E i F, natomiast okrąg o promieniu R zawierający trójkąt ABC na okrąg ω o promieniu $R/2$ zawierający trójkąt DEF.



rys. 3



rys. 4

Poprowadźmy styczną k_A do okręgu ω, która jest równoległa do boku BC i która leży po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt A. Taka prosta istnieje, gdyż okrąg ω przecina prostą BC. Analogicznie konstruujemy styczne k_B i k_C równoległe odpowiednio do prostych CA i AB. Proste k_A, k_B, k_C wyznaczają boki trójkąta XYZ podobnego do trójkąta ABC (rys. 4). Ponadto okrąg ω jest wpisany w trójkąt XYZ. Ponieważ trójkąt ABC jest zawarty w trójkącie XYZ, więc promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC nie przekracza promienia okręgu wpisanego w trójkąt XYZ. Stąd $r \leqslant R/2$, czyli $R \geqslant 2r$. To kończy dowód lematu.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Rozpatrzmy płaszczyznę π przechodzącą przez punkt S i równoległą do płaszczyzny ABC. Płaszczyzna π przecina krawędzie AD, BD, CD odpowiednio w punktach A', B', C' i jej przekrój ze sferą wpisaną w czworościan $ABCD$ jest okręgiem ω o promieniu 1, zawartym w trójkącie $A'B'C'$. Jednokładność o środku D, która przeprowadza trójkąt $A'B'C'$ na trójkąt ABC odwzorowuje okrąg ω na okrąg o promieniu większym niż 1 i zawartym w trójkącie ABC. Stąd wniosek, że promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest większy od 1.

Niech T będzie punktem styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ ze ścianą ABC i przypuśćmy, że $SA \leqslant \sqrt{5}$. Wtedy również $SB \leqslant \sqrt{5}$ oraz $SC \leqslant \sqrt{5}$. Ponadto

$$TA = \sqrt{SA^2 - 1} \leqslant 2$$

i analogicznie $TB \leqslant 2$ oraz $TC \leqslant 2$. Zatem trójkąt ABC leży wewnątrz okręgu o środku T i promieniu 2, co oznacza (na mocy lematu), że promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest mniejszy lub równy 1. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż jak udowodniliśmy wyżej promień ten jest większy od 1. Sprzeczność ta dowodzi, że $SA > \sqrt{5}$.

Zadanie **9.** Dane są nieujemne liczby całkowite $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$. Niech

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}.$$

Wyznaczyć liczbę nieparzystych współczynników wielomianu

$$P(x) = (x+1)^n.$$

Rozwiązanie

Na początku udowodnimy następujący lemat:

Lemat

Jeśli $1 \leqslant t \leqslant 2^k$, to liczba $\binom{2^k}{t}$ jest parzysta.

Dowód

Zauważmy, że

$$\binom{2^k}{t} = \frac{2^k \cdot (2^k - 1) \cdot (2^k - 2) \cdot \ldots \cdot (2^k - (t-2)) \cdot (2^k - (t-1))}{t \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (t-2) \cdot (t-1)}.$$

Następnie, dla dowolnych liczb j i p takich, że $1 \leqslant j \leqslant k$ oraz $1 \leqslant p < t$ zachodzi następująca równoważność

$$2^j \mid p \ \Leftrightarrow\ 2^j \mid 2^k - p.$$

Stąd wynika, że w rozkładzie liczb p i $2^k - p$ na czynniki pierwsze, liczba 2 występuje w tej samej potędze. Zatem liczba 2 występuje w tej samej potędze w liczniku i mianowniku ułamka

$$\frac{(2^k - 1) \cdot (2^k - 2) \cdot \ldots \cdot (2^k - (t-2)) \cdot (2^k - (t-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (t-2) \cdot (t-1)}.$$

Ponieważ $t < 2^k$, więc liczba 2 występuje w rozkładzie liczby t w potędze o wykładniku mniejszym od k. Zatem w liczniku ułamka $\frac{2^k}{t}$ występuje więcej dwójek niż w mianowniku, co dowodzi, że ułamek

$$\frac{2^k \cdot (2^k - 1) \cdot (2^k - 2) \cdot \ldots \cdot (2^k - (t-2)) \cdot (2^k - (t-1))}{t \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (t-2) \cdot (t-1)}$$

(po skróceniu) jest liczbą parzystą. To kończy dowód lematu.

Z lematu wynika, że wielomian

$$(x+1)^{2^k}=x^{2^k}+\binom{2^k}{1}x^{2^k-1}+\ldots+\binom{2^k}{2^k-1}x+1$$

ma dokładnie dwa współczynniki nieparzyste: przy x w najwyższej potędze oraz jedynkę. Stąd wynika, że w wielomianie

$$(x+1)^n=(x+1)^{2^{k_1}}\cdot(x+1)^{2^{k_2}}\cdot\ldots\cdot(x+1)^{2^{k_m}}$$

jedyne współczynniki nieparzyste mogą wystąpić przy iloczynach postaci $x^{2^{k_{i_1}}}\cdot\ldots\cdot x^{2^{k_{i_j}}}$ (a także przy iloczynie jedynek). Takich iloczynów (łącznie z iloczynem jedynek) jest 2^m. Musimy tylko udowodnić, że nie nastąpi redukcja wyrazów podobnych zmniejszająca liczbę współczynników nieparzystych. Wynika to z następującego lematu:

Lemat

Jeśli $k_1<k_2<\ldots<k_m$, $j_1<j_2<\ldots<j_s$ oraz ciągi $(k_1,\ldots,k_m)$ i $(j_1,\ldots,j_s)$ są różne, to $2^{k_1}+\ldots+2^{k_m}\neq 2^{j_1}+\ldots+2^{j_s}$.

Dowód

Przypuśćmy, że

$$2^{k_1}+\ldots+2^{k_m}=2^{j_1}+\ldots+2^{j_s}.$$

Jeśli $2^{k_m}=2^{j_s}$, to w powyższej równości możemy skrócić najwyższe potęgi. Bez zmniejszenia ogólności możemy więc założyć, że najwyższe potęgi są różne, np. $2^{k_m}>2^{j_s}$. Mamy wtedy:

$$2^{k_1}+\ldots+2^{k_m}\geqslant 2^{k_m}>2^{k_m}-1=2^{k_m-1}+2^{k_m-2}+\ldots+2^2+2^1+1\geqslant$$
$$\geqslant 2^{j_1}+\ldots+2^{j_s}.$$

To kończy dowód lematu i tym samym dowodzi, że wielomian $(x+1)^n$ ma 2^m współczynników nieparzystych.

Zadanie **10.** Liczby rzeczywiste dodatnie a,b,c spełniają warunek

$$ab+bc+ca=3.$$

Dowieść, że

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geqslant 9.$$

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c spełniona jest nierówność

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geqslant(a+b+c)(ab+bc+ca). \tag{1}$$

Wymnażając nawiasy przepisujemy nierówność (1) w postaci

$$a^3+b^3+c^3-(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+3abc\geqslant 0,$$

po czym grupując odpowiednie wyrazy sprowadzamy ją do zależności

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geqslant 0.$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a \leqslant b \leqslant c$ oraz zapiszmy ostatnią nierówność jako

$$a(b-a)(c-a)+(c-b)(c(c-a)-b(b-a)) \geqslant 0 .$$

Oba składniki powyższej sumy są nieujemne. To kończy dowód nierówności (1).

Udowodnimy następnie, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c spełniona jest nierówność

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca) . \tag{2}$$

Istotnie: nierówność (2) jest równoważna zależności $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$, która z kolei po pomnożeniu stronami przez 2 sprowadza się do zależności $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$. Dowód nierówności (2) jest więc zakończony.

Korzystając z nierówności (1), (2) oraz uwzględniając dany w treści zadania warunek $ab+bc+ca=3$ otrzymujemy

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geqslant \sqrt{3(ab+bc+ca)} \cdot (ab+bc+ca) = 9 .$$

Zadanie **11.** W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od 180° oraz zachodzi równość

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC .$$

Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD. Udowodnić, że $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$.

Rozwiązanie

Jeśli $AB=AD$, to z danej równości wynika, że $CD=BC$. Wtedy punkty A i P leżą na dwusiecznej kąta BCD, skąd bezpośrednio wnioskujemy, że $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$.

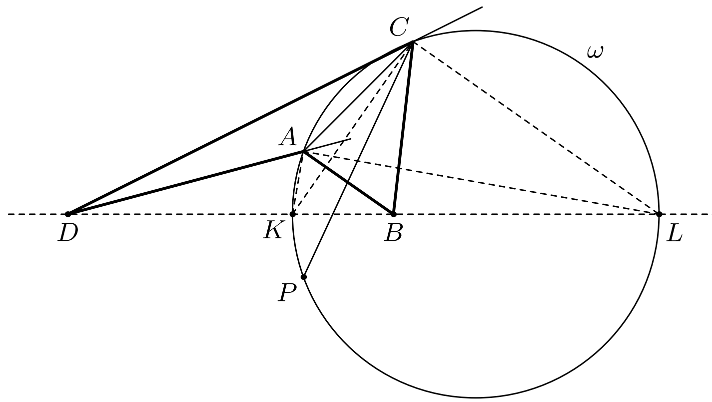
Przyjmijmy więc w dalszej części rozwiązania, że $AB \neq AD$ oraz niech dla ustalenia uwagi $AB < AD$ (rys. 5).

Załóżmy, że dwusieczna kąta DAB przecina odcinek BD w punkcie K. Wówczas na mocy twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{KB}{KD} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} ,$$

skąd wynika, że punkt K leży również na dwusiecznej kąta BCD. Innymi słowy, dwusieczne kątów BAD i BCD przecinają się w punkcie K leżącym na prostej BD. Analogicznie, korzystając z twierdzenia o dwusiecznej kąta zewnętrznego dowodzimy, że dwusieczne kątów *zewnętrznych* BAD i BCD przecinają się w punkcie L, który leży na prostej BD. Ponadto

$$\sphericalangle KAL = \sphericalangle KAB + \sphericalangle BAL = 90^\circ ,$$
$$\sphericalangle KCL = \sphericalangle KCB + \sphericalangle BCL = 90^\circ .$$



rys. 5

Stąd wynika, że punkty A i C leżą na okręgu ω o średnicy KL. Punkt P — symetryczny do punktu A względem prostej KL — również leży na okręgu ω. Ponadto łuki AK i KP okręgu ω (nie zawierające punktu C) są równej długości, a więc $\sphericalangle ACK = \sphericalangle KCP$. Stąd

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCK - \sphericalangle ACK = \sphericalangle KCB - \sphericalangle KCP = \sphericalangle PCB,$$

co należało wykazać.

Zadanie **12.** Niech a_0 będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i/2, & \text{gdy } a_i \text{ jest liczbą parzystą,} \\ 3a_i - 1, & \text{gdy } a_i \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$$

dla $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Wykazać, że jeśli n jest liczbą całkowitą dodatnią spełniającą warunek $a_n = a_0$, to $2^n > a_0$.

Rozwiązanie

Niech a_ℓ będzie największym spośród wyrazów $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Wówczas ciąg $b_i = a_{\ell+i}$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots$ także spełnia dany w treści zadania warunek rekurencyjny oraz równość $b_n = b_0$. Ponadto b_0 jest największą liczbą spośród $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$.

Możemy więc bez straty ogólności przyjąć, że a_0 jest największą liczbą spośród $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Stąd w szczególności wynika, że a_0 jest liczbą parzystą.

Oznaczmy: $f(x) = x/2$ oraz $g(x) = 3x - 1$. Wówczas równość $a_0 = a_n$ możemy przypisać w postaci

$$a_0 = (f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1)(a_0), \tag{1}$$

gdzie każda z funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jest równa funkcji f lub funkcji g. Przyjmijmy w dalszej części rozwiązania, że w złożeniu występującym z prawej strony równości (1) znajduje się dokładnie r funkcji f oraz dokładnie s funkcji g. Wtedy oczywiście $r + s = n$ oraz $r, s \geqslant 1$.

Odwzorowanie g przeprowadza wyraz nieparzysty a_i na wyraz parzysty $3a_i-1$. Stąd wynika, że jeśli dla pewnego i mamy $f_i=g$, to $f_{i-1}=f$. Wyraz a_0 jest parzysty, więc $f_1=f$. Z obserwacji tych wynika, że $r\geqslant s$.

Niech $p(x)=3x$. Wtedy dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest zależność $g(x)<p(x)$. Obie funkcje p i q są rosnące, więc zastępując każdą funkcję g znajdującą się w równości (1) przez funkcję p powiększamy wartość wyrażenia stojącego z prawej stronie równości (1). Innymi słowy

$$a_0<(\tilde{f}_n\circ\tilde{f}_{n-1}\circ\ldots\circ\tilde{f}_1)(a_0)\,, \tag{2}$$

gdzie tym razem każda z funkcji $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\ldots,\tilde{f}_n$ jest równa funkcji f lub funkcji p. Nierówność (2) jest równoważna zależności

$$a_0<\frac{a_0\cdot 3^s}{2^r}\,,$$

czyli $3^s>2^r$.

Niech

$$h(x)=g(f(x))=\frac{3}{2}x-1\,.$$

Jak zauważyliśmy wyżej, w równości (1) mamy $f_1=f$. Ponadto jeśli dla pewnego $i\geqslant 2$ spełniona jest zależność $f_i=g$, to $f_{i-1}=f$. Zatem związek (1) możemy przepisać w postaci

$$a_0=(g_r\circ g_{r-1}\circ\ldots\circ g_1)(a_0)\,, \tag{3}$$

gdzie każda z funkcji $g_1,g_2,\ldots,g_r$ jest równa f lub h. Ponadto z prawej strony równości (3) występuje dokładnie s funkcji h oraz $r-s$ funkcji f.

Dalej zauważmy, że $h(f(x))=\frac{3}{4}x-1<\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}=f(h(x))$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Obie funkcje f i h są rosnące, zatem wymieniając w równości (3) dowolne złożenie $f\circ h$ na złożenie $h\circ f$ zmniejszamy wartość wyrażenia stojącego po prawej stronie równości (3). Przy pomocy skończonej liczby takich zamian możemy doprowadzić prawą stronę związku (3) do postaci

$$(\underbrace{h\circ h\circ\ldots\circ h}_{s\text{ razy}}\circ\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{r-s\text{ razy}})(a_0)=(h^s\circ f^{r-s})(a_0)\,.$$

A zatem

$$a_0\geqslant(h^s\circ f^{r-s})(a_0)\,. \tag{4}$$

Udowodnimy indukcyjnie, że $h^s(x)=(\frac{3}{2})^s(x-2)+2$ dla $s=1,2,\ldots$ (gdzie h^s oznacza s-krotne złożenie funkcji h). Istotnie: Dla $s=1$ powyższa równość jest spełniona, a krok indukcyjny wygląda następująco:

$$h^{s+1}(x)=h(h^s(x))=h\left(\left(\frac{3}{2}\right)^s(x-2)+2\right)=$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\right)^s(x-2)+2\right)-1=\left(\frac{3}{2}\right)^{s+1}(x-2)+2\,.$$

Korzystając z udowodnionej właśnie zależności przepisujemy nierówność (4) jako

$$a_0 \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^s \left(\frac{a_0}{2^{r-s}} - 2\right) + 2\,.$$

Mnożąc ją stronami przez 2^r i przegrupowując wyrazy uzyskujemy

$$(3^s - 2^r)a_0 \leqslant 3^s \cdot 2^{r-s+1} - 2^{r+1}\,.$$

Wyżej udowodniliśmy, że $3^s > 2^r$, a więc $3^s - 2^r \geqslant 1$. Zatem

$$a_0 \leqslant (3^s - 2^r)a_0 \leqslant 2^{r+1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^s - 1\right) = 2^{n+1}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^s - \left(\frac{1}{2}\right)^s\right).$$

Aby dokończyć rozwiązanie zadania wystarczy wykazać, że

$$\left(\frac{3}{4}\right)^s - \left(\frac{1}{2}\right)^s < \frac{1}{2} \quad \text{dla} \quad s = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $s = 1$ i dla $s = 2$ powyższa nierówność jest spełniona. Jeśli natomiast $s \geqslant 3$, to

$$\left(\frac{3}{4}\right)^s - \left(\frac{1}{2}\right)^s < \left(\frac{3}{4}\right)^s \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} < \frac{1}{2}\,.$$

Tym samym rozwiązanie zadania zostało zakończone.

(*wg, wp*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`