LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2006 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równości
$$a^2+b^2=c^2\,, \quad x^2+y^2=z^2$$
oraz nierówności
$$|x-a|\leqslant 1, \quad |y-b|\leqslant 1\,.$$
Wykazać, że zbiory $\{a,b\}$ oraz $\{x,y\}$ są równe.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC+BC=3AB$. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Niech K i L będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów D i E względem punktu I. Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

3. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab+bc+ca=abc$. Dowieść, że
$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geqslant 1\,.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.

LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2006 r. (drugi dzień zawodów)

4. Niech c będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg (a_n) jest określony przez warunki

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = d(a_n) + c \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

gdzie $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby m. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia k, że ciąg $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ jest okresowy.

5. Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez punkty A i C przecina okrąg o_2 przechodzący przez punkty B i C w różnych punktach C i D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera punktu C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera punktu C. Dowieść, że proste PQ i CD są prostopadłe.

6. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita n, przy czym $p \geqslant n \geqslant 3$. Zbiór A składa się z n-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ i ma następującą własność:

Dla dowolnych dwóch ciągów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ze zbioru A istnieją takie różne liczby k, l, m, że

$$x_k \neq y_k, \quad x_l \neq y_l, \quad x_m \neq y_m .$$

Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru A.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.