LVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2006 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Liczby całkowite dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równości

$$a^2+b^2=c^2, \quad x^2+y^2=z^2$$

oraz nierówności

$$|x-a|\leqslant 1, \quad |y-b|\leqslant 1.$$

Wykazać, że zbiory $\{a,b\}$ oraz $\{x,y\}$ są równe.

Rozwiązanie

Wobec symetrii ról trójek (a,b,c) oraz (x,y,z) można przyjąć, że $z\geqslant c$. Patrząc na punkty $A=(a,b)$, $X=(x,y)$ na płaszczyźnie z początkiem układu współrzędnych $O=(0,0)$ widzimy, że

$$z-c=OX-OA\leqslant AX=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\leqslant\sqrt{2}.$$

Mamy więc dwie możliwości: $z=c+1$ lub $z=c$.

1. Jeśli $z=c+1$, to wtedy $x^2+y^2>a^2+b^2$. Wobec tego $x>a$ lub $y>b$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $x>a$, czyli $x=a+1$. Wówczas

$$y^2=z^2-x^2=(c+1)^2-(a+1)^2=b^2+2c-2a.$$

Zatem liczby b i y są jednakowej parzystości. Ponadto $c>a$, więc powyższa równość implikuje również, że $y>b$. Uzyskaliśmy sprzeczność z warunkiem $|y-b|\leqslant 1$.

2. Jeśli $z=c$, to mamy równość $x^2+y^2=a^2+b^2$, czyli

$$(x-a)(x+a)=(b-y)(b+y).$$

Albo obie strony tego równania są równe zeru i wtedy mamy tezę ($x=a$, $y=b$), albo są różne od zera i wtedy

$$\frac{x+a}{b+y}=\frac{b-y}{x-a}=\pm\frac{|b-y|}{|x-a|}=\pm 1.$$

Wartość -1 wykluczamy, bo liczby a, b, x, y są dodatnie. Z ostatniej równości uzyskujemy zatem $a+x=b+y$ oraz $b-y=x-a$. Stąd dostajemy $x=b$ oraz $y=a$, czyli tezę zadania.

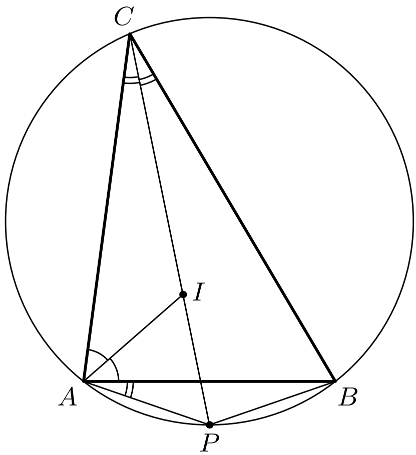
Zadanie **2.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC+BC=3AB$. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Niech K i L będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów D i E względem punktu I. Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

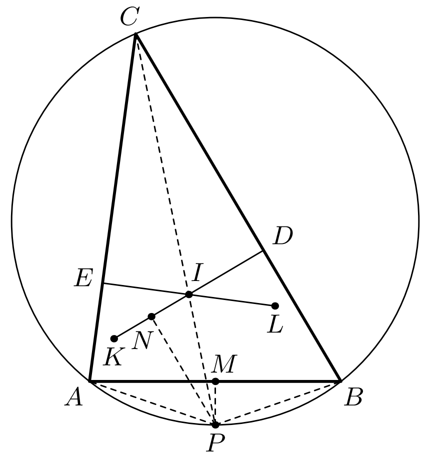
Oznaczmy przez P punkt przecięcia dwusiecznej kąta ACB z okręgiem opisanym na trójkącie ABC (rys. 1). Wówczas $AP = BP$. Ponadto

$$\sphericalangle PAI = \sphericalangle PAB + \sphericalangle BAI = \sphericalangle PCB + \sphericalangle CAI = \\ = \sphericalangle ACI + \sphericalangle CAI = \sphericalangle PIA,$$

skąd wynika, że $AP = IP$.



rys. 1



rys. 2

Punkty A, B oraz I leżą więc na okręgu o środku P. Wykażemy, że na tym okręgu leżą również punkty K i L.

Punkty D i E są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami BC i AC, a więc $CD = CE = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$. Ponadto dana w treści zadania równość jest równoważna zależności $AB = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$. Stąd wynika, że $CD = AB$.

Oznaczmy przez M środek odcinka AB, a przez N rzut prostokątny punktu P na prostą DI (rys. 2). Wówczas proste PN i BC są równoległe, wobec czego $\sphericalangle PAM = \sphericalangle PCB = \sphericalangle IPN$. To w połączeniu z równością $AP = IP$ dowodzi, że trójkąty prostokątne APM i PIN są przystające. Stąd otrzymujemy $PN = AM$.

Proste CD i PN są równoległe, więc

$$\frac{ID}{IN} = \frac{CD}{PN} = \frac{AB}{AM} = 2,$$

skąd dostajemy $ID = 2 \cdot IN$. Zależność ta w połączeniu z równością $ID = IK$ implikuje, że $IN = KN$. Zatem punkt K jest symetryczny do punktu I względem prostej PN. Wobec tego $IP = KP$.

Analogicznie dowodzimy, że $IP = LP$. Z uzyskanych zależności wynika, że punkty A, B, K, L oraz I leżą na okręgu o środku P, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **3.** Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab+bc+ca=abc$. Dowieść, że

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geqslant 1\,.$$

Rozwiązanie

Dzieląc równość $ab+bc+ca=abc$ stronami przez abc otrzymujemy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\,.$$

Podstawmy zatem: $x=1/a$, $y=1/b$, $z=1/c$. Wtedy liczby x, y, z są dodatnie, a ich suma wynosi 1. Ponadto

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}=\frac{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{y^4}}{\dfrac{1}{xy}\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}\right)}=\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}\,.$$

Zatem dowodzona nierówność przybiera postać

(1) $$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3} \geqslant 1\,.$$

Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y spełniona jest zależność

(2) $$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} \geqslant \frac{x+y}{2}\,.$$

Przekształcając równoważnie powyższą nierówność dostajemy kolejno

$$2x^4+2y^4 \geqslant x^4+x^3y+xy^3+y^4\,,$$
$$x^4-x^3y+y^4-xy^3 \geqslant 0\,,$$
$$(x^3-y^3)(x-y) \geqslant 0\,.$$

Uzyskaliśmy zależność prawdziwą dla dowolnych liczb dodatnich x i y, a zatem nierówność (2) jest spełniona.

Analogicznie dowodzimy, że

(3) $$\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3} \geqslant \frac{y+z}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{z^4+x^4}{z^3+x^3} \geqslant \frac{z+x}{2}\,.$$

Dodając stronami związki (2), (3) oraz wykorzystując warunek $x+y+z=1$ otrzymujemy dowodzoną nierówność (1).

(*wp*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2006 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Niech c będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg (a_n) jest określony przez warunki

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = d(a_n) + c \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots\ ,$$

gdzie $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby m. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia k, że ciąg $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ jest okresowy.

Rozwiązanie

Wykażemy, że $n = 1, 2, 3, \ldots$ zachodzą nierówności $1 \leqslant a_n \leqslant 2c+2$.

Pierwsza z nich jest oczywiście spełniona. Drugą wykażemy indukcyjnie.

Dla $n = 1$ mamy $a_1 = 1 \leqslant 2c+2$, co jest prawdą. Ustalmy więc $n > 1$ i przyjmijmy, że $a_n \leqslant 2c+2$.

Jeśli $k \geqslant 3$ jest liczbą całkowitą, to żadna liczba całkowita z przedziału $(\frac{1}{2}k, k)$ nie jest dzielnikiem liczby k. Wobec tego liczba k nie może mieć więcej niż $\frac{1}{2}k + 1$ dzielników dodatnich. Zatem

$$d(k) \leqslant \frac{k}{2} + 1 \quad \text{dla} \quad k = 3, 4, \ldots\ .$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że powyższa nierówność jest również spełniona dla $k = 1$ oraz dla $k = 2$. Stąd oraz z założenia indukcyjnego uzyskujemy

$$a_{n+1} = d(a_n) + c \leqslant \frac{a_n}{2} + 1 + c \leqslant \frac{2c+2}{2} + 1 + c = 2c + 2,$$

co kończy dowód indukcyjny postulowanej nierówności.

Ciąg (a_n) jest więc ograniczony, a zatem istnieją takie liczby całkowite dodatnie $k < l$, że $a_k = a_l$.

Każdy wyraz a_n danego ciągu wyznacza wyraz następny a_{n+1}, a więc ciąg $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ jest okresowy o okresie równym $l - k$.

Zadanie **5.** Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez punkty A i C przecina okrąg o_2 przechodzący przez punkty B i C w różnych punktach C i D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera punktu C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera punktu C. Dowieść, że proste PQ i CD są prostopadłe.

Rozwiązanie

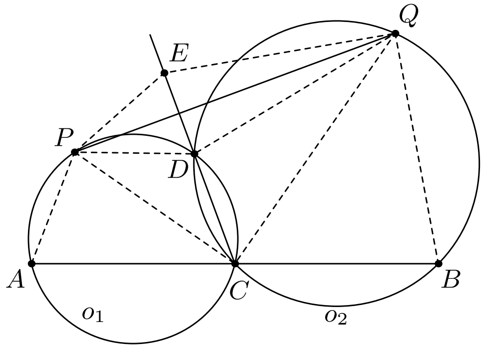
Jeśli $AC = CD$, to również $BC = CD$. Wtedy odcinki PC i QC są odpowiednio średnicami okręgów o_1 i o_2. Zatem $\sphericalangle CDP = \sphericalangle CDQ = 90^\circ$, skąd wynika, że punkt D leży na odcinku PQ, a proste PQ i CD są prostopadłe.

Przyjmijmy więc w dalszej części rozwiązania, że $AC \neq CD$.

Niech E będzie takim punktem leżącym na półprostej $CD^{\rightarrow}$, że $CE = AC$ (rys. 3). Wtedy również $CE = BC$.

Z zależności $CE = AC$ oraz $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ECP$ wynika, że trójkąty ACP oraz ECP są przystające (cecha *bok-kąt-bok*). Wobec tego $EP = AP = DP$.

Analogicznie dowodzimy, że $EQ = DQ$.



rys. 3

Z uzyskanych równości wynika, że punkty D i E są symetryczne względem prostej PQ. Prosta DE jest więc prostopadła do prostej PQ, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **6.** Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita n, przy czym $p \geqslant n \geqslant 3$. Zbiór A składa się z n-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ i ma następującą własność:
Dla dowolnych dwóch ciągów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ze zbioru A istnieją takie różne liczby k, l, m, że

$$x_k \neq y_k\,, \quad x_l \neq y_l\,, \quad x_m \neq y_m\,.$$

Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru A.

Rozwiązanie

Odpowiedź: p^{n-2}.

Każde dwa różne ciągi zbioru A muszą różnić się na co najmniej jednej z początkowych $n-2$ pozycji. Wobec tego liczba ciągów w tym zbiorze nie przekracza liczby wszystkich ciągów $(n-2)$-wyrazowych o wyrazach ze zbioru p-elementowego, czyli liczby p^{n-2}.

Skonstruujemy p^{n-2} ciągów o wyrazach ze zbioru $S = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ mających postulowaną własność. W tym celu rozpatrzmy wszystkie ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o wyrazach ze zbioru S spełniające warunki

$$(1) \qquad x_{n-1} \equiv \sum_{i=1}^{n-2} x_i \pmod{p} \quad \text{oraz} \quad x_n \equiv \sum_{i=1}^{n-2} i x_i \pmod{p}\,.$$

Ciągów takich jest p^{n-2}, ponieważ każdy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ o wyrazach ze zbioru p-elementowego S wyznacza jednoznacznie wartości x_{n-1} i x_n.

Każde dwa różne ciągi spełniające zależności (1) różnią się na co najmniej jednej z początkowych $n-2$ pozycji. Chcemy zaś dowieść, że każde dwa takie ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ różnią się na co najmniej trzech pozycjach.

Jeśli ciągi te różnią się na co najmniej trzech miejscach o numerach $1, 2, \ldots, n-2$, to nie ma czego dowodzić. Pozostaje zatem rozpatrzeć następujące dwa przypadki.

1. Odcinki początkowe $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ oraz $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$ różnią się na dokładnie dwóch pozycjach o numerach i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n-2)$.

Wtedy $x_i \neq y_i$ oraz $x_j \neq y_j$. Z zależności (1) otrzymujemy

$$\begin{cases} x_{n-1} - y_{n-1} \equiv (x_i - y_i) + (x_j - y_j) \pmod{p} \\ \qquad x_n - y_n \equiv i(x_i - y_i) + j(x_j - y_j) \pmod{p}. \end{cases}$$

Stąd $(x_n - y_n) - i(x_{n-1} - y_{n-1}) \equiv (j-i)(x_j - y_j) \pmod{p}$.

Liczba p jest pierwsza, a liczby x_j i y_j są różne i należą do zbioru S. Ponadto $1 \leqslant j-i < n \leqslant p$. Stąd wynika, że liczba $(x_n - y_n) - i(x_{n-1} - y_{n-1})$ nie jest podzielna przez p. Zatem któraś z liczb $x_{n-1} - y_{n-1}$ lub $x_n - y_n$ nie jest podzielna przez p. Wobec tego $x_{n-1} \neq y_{n-1}$ lub $x_n \neq y_n$. Rozpatrywane ciągi różnią się więc na pozycji o numerze $n-1$ lub n, czyli łącznie na co najmniej trzech pozycjach.

2. Odcinki początkowe $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ oraz $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$ różnią się na dokładnie jednej pozycji o numerze i $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$.

Wtedy $x_i \neq y_i$ i podobnie korzystając z zależności (1) mamy

$$\begin{cases} x_{n-1} - y_{n-1} \equiv x_i - y_i \pmod{p} \\ \qquad x_n - y_n \equiv i(x_i - y_i) \pmod{p} \end{cases}$$

Stąd wynika, że liczby $x_{n-1} - y_{n-1}$ oraz $x_n - y_n$ nie są podzielne przez p. Zatem $x_{n-1} \neq y_{n-1}$ oraz $x_n \neq y_n$, czyli i w tym przypadku rozpatrywane ciągi różnią się na co najmniej trzech pozycjach.

(*kd, wp*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`