LVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

5 kwietnia 2006 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e układ równań

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że liczby a, b, c, d, e spełniają podany układ równań i że b jest największą z nich (nie tracimy ogólności, bo układ jest cykliczny). Wykażemy, że wówczas $b = d$.

Przypuśćmy, przeciwnie, że $b > d$. Odejmując drugie równanie od równania pierwszego dostajemy $a^2 - b^2 = b^3 - d^3 > 0$, czyli

$$(a-b)(a+b) > 0.$$

Liczba a nie jest większa od liczby b; w takim razie $a - b < 0$ oraz $a + b < 0$. Ta ostatnia nierówność daje jednak wniosek, że $a^3 + b^3 < 0$, w sprzeczności z równaniem $e^2 = a^3 + b^3$.

Zatem istotnie $b = d$, co oznacza, że także d ma maksymalną wartość wśród pięciu niewiadomych. Powtarzając to rozumowanie stwierdzamy kolejno, że $d = a = c = e$.

Dany w zadaniu układ równań sprowadza się zatem do rozwiązania równania $a^2 = 2a^3$, skąd otrzymujemy $a = 0$ lub $a = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: Układ równań ma dwa rozwiązania (a,b,c,d,e):

$$(0,0,0,0,0) \quad \text{oraz} \quad \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Zadanie **2.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k, dla których liczba $3^k + 5^k$ jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku naturalnym większym od 1.

Rozwiązanie

Jeżeli k jest liczbą parzystą, to liczby 3^k i 5^k są kwadratami liczb nieparzystych, dającymi resztę 1 z dzielenia przez 4. Stąd wniosek, że liczba $3^k + 5^k$ daje resztę 2 z dzielenia przez 4, a więc dzieli się przez 2 i nie dzieli się przez 2^2. Taka liczba nie może być potęgą liczby całkowitej o wykładniku większym od 1.

Jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to

$$3^k + 5^k = (3+5)(3^{k-1} - 3^{k-2} \cdot 5 + 3^{k-3} \cdot 5^2 - 3^{k-4} \cdot 5^3 + \ldots - 3 \cdot 5^{k-2} + 5^{k-1}).$$

Drugi czynnik po prawej stronie powyższej zależności zawiera nieparzystą (równą k) liczbę nieparzystych składników. Stąd wynika, że liczba 3^k+5^k dzieli się przez 8 i nie dzieli się przez 16. Jeśli więc liczba ta jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku większym od 1, to musi być ona sześcianem liczby całkowitej.

Jeżeli $k=1$, to rozpatrywana liczba jest sześcianem liczby całkowitej: $3^1+5^1=2^3$. Przyjmijmy więc w dalszej części rozumowania, że $k\geqslant 3$.

Z zależności

$$0^3\equiv 0 \pmod 9, \quad (\pm 1)^3\equiv \pm 1 \pmod 9, \quad (\pm 2)^3\equiv \mp 1 \pmod 9,$$
$$(\pm 3)^3\equiv 0 \pmod 9, \quad (\pm 4)^3\equiv \pm 1 \pmod 9$$

wynika, że sześciany liczb całkowitych dają z dzielenia przez 9 jedynie reszty 0, 1, 8. Dla $k\geqslant 3$ mamy $9\,|\,3^k$, więc $3^k+5^k\equiv 5^k \pmod 9$.

Reszty z dzielenia przez 9 liczb 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6 są odpowiednio równe 5, 7, 8, 4, 2, 1. Wobec tego jeżeli 3^k+5^k jest sześcianem liczby całkowitej przy $k\geqslant 3$, to $3\,|\,k$. Wcześniej wykazaliśmy, że k nie może być liczbą parzystą. Zatem liczba k jest postaci $6l+3$, gdzie l jest liczbą całkowitą nieujemną.

Z zależności $3^3\equiv 5^3\equiv 6 \pmod 7$ oraz $3^6\equiv 5^6\equiv 1 \pmod 7$ wynika, że

$$3^k+5^k=3^{6l+3}+5^{6l+3}\equiv 3^3+5^3\equiv 5 \pmod 7.$$

Jednakże z bezpośredniego sprawdzenia otrzymujemy, że sześcian liczby całkowitej daje z dzielenia przez 7 resztę 0, 1 lub 6:

$$0^3\equiv 0 \pmod 7, \quad (\pm 1)^3\equiv \pm 1 \pmod 7,$$
$$(\pm 2)^3\equiv \pm 1 \pmod 7, \quad (\pm 3)^3\equiv \mp 1 \pmod 7.$$

Zatem rozpatrywana liczba dla $k\geqslant 3$ nie może być sześcianem liczby całkowitej, co kończy rozwiązanie zadania.

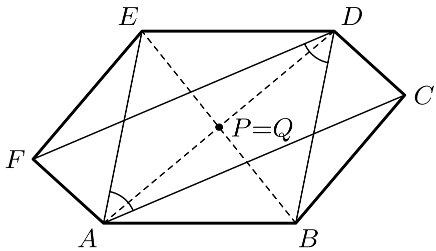
Odpowiedź: $k=1$.

Zadanie **3.** Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC=DF$, $CE=FB$ oraz $EA=BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

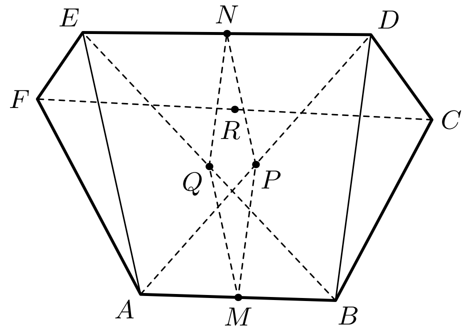
Rozwiązanie

Oznaczmy przez P, Q, R odpowiednio środki przekątnych AD, BE, CF.

Przyjmijmy najpierw, że dwa spośród punktów P, Q, R pokrywają się; niech na przykład $P=Q$ (rys. 1). Wtedy czworokąt $ABDE$ jest równoległobokiem. Ponadto trójkąt ACE jest przystający do trójkąta DFB, skąd wynika, że $\sphericalangle EAC=\sphericalangle BDF$. Równość ta wraz z uzyskaną zależnością $BD\parallel EA$ dowodzi, że odcinki AC i DF są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, a zatem czworokąt $ACDF$ jest równoległobokiem. Punkt R pokrywa się więc z punktami P i Q, skąd wynika, że jest on środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$. Pozostaje zauważyć, że wówczas proste łączące środki przeciwległych boków sześciokąta $ABCDEF$ przechodzą przez jego środek symetrii.



rys. 1



rys. 2

Przyjmijmy z kolei, że punkty P, Q i R są różne. Niech M i N będą odpowiednio środkami odcinków AB i DE (rys. 2).

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że odcinki PN i AE są równoległe, a ponadto $PN = \frac{1}{2}AE$. Analogicznie uzyskujemy związki $QM = \frac{1}{2}AE$, $PM = \frac{1}{2}BD$ oraz $QN = \frac{1}{2}BD$. Z zależności tych oraz z równości $AE = BD$ wnioskujemy, że $PN = QM = PM = QN$, co oznacza, że czworokąt $MPNQ$ jest rombem. Zatem prosta MN jest symetralną odcinka PQ.

Analogicznie dowodzimy, że pozostałe dwie proste łączące środki przeciwległych boków danego sześciokąta są symetralnymi odcinków QR i RP. Stąd proste łączące środki przeciwległych boków sześciokąta $ABCDEF$ mają punkt wspólny, będący środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQR.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

6 kwietnia 2006 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Na trójce liczb wykonujemy następującą operację. Wybieramy dwie spośród tych liczb i zastępujemy je ich sumą oraz ich iloczynem, pozostała liczba nie ulega zmianie. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od trójki $(3,4,5)$ i wykonując tę operację możemy ponownie uzyskać trójkę liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

Rozwiązanie

Jeżeli w pierwszym kroku wybierzemy liczby 3 i 5, to otrzymamy trójkę $(4,8,15)$, w której dokładnie jedna liczba jest nieparzysta. Wybierając z takiej trójki dwie liczby parzyste zamieniamy je na liczby parzyste, natomiast decydując się na jedną liczbę parzystą, a drugą nieparzystą dostajemy liczby różnych parzystości. Zatem z trójki, w której dokładnie jedna liczba jest nieparzysta, otrzymamy trójkę, która ma tę samą własność.

Jeżeli jednak wśród liczb naturalnych a, b, c dokładnie jedna jest nieparzysta, to równość $a^2+b^2=c^2$ nie może zachodzić — jedna ze stron tej równości jest nieparzysta, a druga parzysta. Nie otrzymamy więc trójki liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

Z kolei wybierając w pierwszym kroku liczby 3 i 4 otrzymamy trójkę $(5,7,12)$, a biorąc 4 i 5 uzyskamy trójkę $(3,9,20)$. W obu tych trójkach jest dokładnie jedna liczba parzysta i jest ona największą liczbą w trójce. Jeżeli w takiej trójce wybierzemy dwie liczby nieparzyste, to otrzymamy trójkę, w której dokładnie jedna liczba jest nieparzysta. Z takiej trójki, jak już wiemy, nie otrzymamy trójki liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

Jeżeli natomiast będziemy konsekwentnie wybierać liczby różnych parzystości, to w każdym kroku otrzymamy trójkę z dokładnie jedną liczbą parzystą, a z nierówności $xy>x+y$ (prawdziwej dla liczb $x,y>2$) wynika, że ta liczba parzysta będzie największą liczbą w trójce.

Pozostaje zauważyć, że jeżeli liczby naturalne a, b są nieparzyste, a liczba c jest parzysta, to $a^2+b^2 \equiv 1+1 \pmod 4$, więc równość $a^2+b^2=c^2$ nie może być spełniona.

Odpowiedź: Ponowne uzyskanie trójki liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego nie jest możliwe.

Zadanie **5.** Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB=CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez s sferę wpisaną w czworościan $ABCD$. Rozpoczniemy od wykazania, że trójkąty ABC i ABD są przystające.

Niech E będzie środkiem krawędzi AB. Ponieważ K i L są punktami styczności sfery s do czworościanu $ABCD$, to $AK=AL$ i $BK=BL$, skąd wynika, że trójkąty AKB i ALB są przystające. Ich środkowe KE i LE mają jednakową długość, skąd $CE=3\cdot KE=3\cdot LE=DE$. Ale

$$\sphericalangle CEB=\sphericalangle KEB=\sphericalangle LEB=\sphericalangle DEB\,,$$

więc trójkąty BEC i BED są przystające.

Analogicznie dowodzimy, że trójkąty AEC i AED są przystające. Zatem trójkąty ABC i ABD są przystające.

Niech M i N będą punktami styczności sfery s odpowiednio ze ścianami BCD i CDA. Otrzymujemy następujące pary trójkątów przystających: BKC i BMC; BLD i BMD; AKC i ANC; ALD i AND; CMD i CND.

Oznaczmy: $\alpha=\sphericalangle AKC$, $\beta=BKC$. Wtedy $\sphericalangle ALD=\alpha$ oraz $\sphericalangle BLD=\beta$, gdyż trójkąty ABC i ABD są przystające. Zatem

$$\sphericalangle ANC=\sphericalangle AKC=\alpha\,,\quad \sphericalangle AND=\sphericalangle ALD=\alpha\,,$$
$$\sphericalangle BMC=\sphericalangle BKC=\beta\,,\quad \sphericalangle BMD=\sphericalangle BLD=\beta\,.$$

Stąd otrzymujemy $\sphericalangle DNC=360^\circ-\sphericalangle ANC-\sphericalangle AND=360^\circ-2\alpha$, jak również $\sphericalangle DMC=360^\circ-\sphericalangle BMC-\sphericalangle BMD=360^\circ-2\beta$. Ale $\sphericalangle DMC=\sphericalangle DNC$, skąd $\alpha=\beta$. Zatem $\sphericalangle AKE=\sphericalangle BKE$, więc KE jest jednocześnie dwusieczną i środkową w trójkącie AKB. Stąd $AK=BK$, a więc $AC=BC$. Ostatecznie otrzymujemy więc $AC=BC=AD=BD$.

Przez każdą krawędź czworościanu $ABCD$ poprowadźmy płaszczyznę równoległą do przeciwległej krawędzi czworościanu. Płaszczyzny te wyznaczają równoległościan. W każdej z jego ścian jedna przekątna jest krawędzią czworościanu $ABCD$, a druga przekątna jest równa i równoległa do przeciwległej krawędzi tego czworościanu. Ponieważ przeciwległe krawędzie czworościnu $ABCD$ są równe, więc wszystkie ściany otrzymanego równoległościnu są prostokątami. A zatem równoległościan ten jest prostopadłościanem. Wynika stąd w szczególności, że prosta łącząca środki krawędzi AD i BC jest prostopadła do tych krawędzi.

Rozpatrzmy przekształcenie będące obrotem o kąt 180° wokół prostej łączącej środki krawędzi AD i BC. W wyniku tego przekształcenia czworościan $ABCD$ przechodzi na siebie, więc sfera s też musi przejść na siebie. Ponadto ściany ABC i ABD przechodzą odpowiednio na ściany DCB i DCA, a zatem środki ciężkości ścian DCB i DCA pokrywają się z punktami M i N.

Analogicznie jak wyżej wykazujemy, że $AB = BD = DC = CA$, skąd wnioskujemy, że wszystkie krawędzie czworościanu $ABCD$ są równej długości. To oznacza, że czworościan $ABCD$ jest foremny.

Zadanie **6.** Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b, dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$ jest wielomianem postaci

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \,,$$

gdzie każda z liczb $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ jest równa 1 lub -1.

Rozwiązanie

Jeżeli trójmian $x^2 + ax + b$ jest dzielnikiem pewnego wielomianu $Q(x)$ o współczynnikach całkowitych, to oczywiście wyraz wolny b jest dzielnikiem wyrazu wolnego wielomianu $Q(x)$. Wobec tego (w rozważanej sytuacji) $b = \pm 1$.

Żaden wielomian $Q(x)$ postaci $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \ldots \pm x \pm 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych o wartości bezwzględnej większej lub równej 2. Przypuśćmy bowiem, że liczba r o module $|r| \geqslant 2$ spełnia zależność $Q(r) = 0$. Wtedy

$$|r|^n = |r^n| = |r^{n-1} \pm r^{n-2} \pm \ldots \pm r \pm 1| \leqslant$$
$$\leqslant |r|^{n-1} + |r|^{n-2} + \ldots + |r| + 1 = \frac{|r|^n - 1}{|r| - 1} < \frac{|r|^n}{|r| - 1},$$

skąd wynika, że $|r| < 2$. Sprzeczność.

Z drugiej strony, każdy pierwiastek trójmianu $T(x) = x^2 + ax + b$ jest też pierwiastkiem wielomianu $T(x) \cdot P(x)$. Stąd wynika, że trójmian $T(x)$ nie ma pierwiastków w zbiorze $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$. Zatem $T(-2) > 0$ oraz $T(2) > 0$, czyli $4 - 2a + b > 0$ oraz $4 + 2a + b > 0$.

Jeśli $b = 1$, to mamy $5 > 2a$ i $5 > -2a$, skąd wynika, że a jest jedną z liczb -2, -1, 0, 1, 2. Jeżeli natomiast $b = -1$, to $3 > 2a$ i $3 > -2a$ i do rozpatrzenia pozostają przypadki, gdy a jest jedną z liczb -1, 0, 1.

Bezpośrednie sprawdzenie dowodzi, że wszystkie uzyskane pary (a, b) spełniają warunki zadania:

$$(x^2 - 2x + 1) \cdot (x + 1) = x^3 - x^2 - x + 1, \qquad (x^2 + 1) \cdot (x + 1) = x^3 + x^2 + x + 1,$$
$$(x^2 + 2x + 1) \cdot (x - 1) = x^3 + x^2 - x - 1, \qquad (x^2 - 1) \cdot (x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1,$$
$$(x^2 - x + 1) \cdot 1 = x^2 - x + 1, \qquad (x^2 + x + 1) \cdot 1 = x^2 + x + 1,$$
$$(x^2 - x - 1) \cdot 1 = x^2 - x - 1, \qquad (x^2 + x - 1) \cdot 1 = x^2 + x - 1.$$

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia następujących osiem par (a, b): $(-2, 1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`