LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (11 września 2006 r. – 9 października 2006 r.)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2+2yz+5x=2 \\ y^2+2zx+5y=2 \\ z^2+2xy+5z=2 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych k, m, dla których każda z liczb k^2+4m, m^2+5k jest kwadratem liczby całkowitej.

3. W czworokącie wypukłym $ABCD$, nie będącym równoległobokiem, zachodzi równość $AB=CD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Dowieść, że rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prostą MN są odcinkami o jednakowej długości, równej długości odcinka MN.

4. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wyznaczyć liczbę ciągów $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, gdzie $c_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, o następującej własności: w każdej trójce kolejnych wyrazów są co najmniej dwa wyrazy równe.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

9 października 2006 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (10 października 2006 r. – 6 listopada 2006 r.)

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 45^\circ$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że

$$OK + KH = OL + LH\,.$$

6. Wykazać, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{1}{a+ab+abc} + \frac{1}{b+bc+bca} + \frac{1}{c+ca+cab} \leqslant \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{abc}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

7. Dany jest czworościan $ABCD$. Dwusieczna kąta ABC przecina krawędź AC w punkcie Q. Punkt P jest symetryczny do D względem punktu Q. Punkt R leży na krawędzi AB, przy czym $BR = \frac{1}{2}BC$. Udowodnić, że z odcinków o długościach BP, CD oraz $2\cdot QR$ można zbudować trójkąt.

8. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że istnieje taka permutacja $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, p-1\}$, że liczby

$$x_1, \quad x_1x_2, \quad x_1x_2x_3, \quad \ldots, \quad x_1x_2...x_{p-1}$$

dają różne reszty przy dzieleniu przez p.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

6 listopada 2006 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (7 listopada 2006 r. – 4 grudnia 2006 r.)

9. Niech $F(k)$ będzie iloczynem wszystkich dodatnich dzielników liczby całkowitej dodatniej k. Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie m, n, dla których $F(m)=F(n)$.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty P i U leżą na boku BC, punkty Q i S leżą na boku CA, punkty R i T leżą na boku AB, przy czym

$$PR\perp BC,\quad QP\perp CA,\quad RQ\perp AB,$$
$$US\perp BC,\quad ST\perp CA,\quad TU\perp AB.$$

Dowieść, że trójkąty PQR i STU są przystające.

11. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć liczbę permutacji $(x_1,x_2,\ldots,x_{6n-1})$ zbioru $\{1,2,\ldots,6n-1\}$, spełniających warunki:

$$\text{jeśli } i-j=2n+1, \text{ to } x_i>x_j;$$
$$\text{jeśli } i-j=4n\quad, \text{ to } x_i<x_j.$$

12. Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje w przedziale $\langle a;b\rangle$ (gdzie $a<b$) tylko wartości dodatnie. Udowodnić, że istnieją takie wielomiany P oraz $Q_1,Q_2,\ldots,Q_m$, że

$$W(x)=\big(P(x)\big)^2+(x-a)(b-x)\sum_{i=1}^{m}\big(Q_i(x)\big)^2$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 grudnia 2006 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej, ul. Janiszewskiego 14a, 50-370 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`