LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2007 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

2. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$BC=CD, \quad DE=EA, \quad \sphericalangle BCD=\sphericalangle DEA=90^\circ.$$

Udowodnić, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt. Wyznaczyć miary jego kątów, znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC.

3. Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n. Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: Wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P. Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę.

Dla każdego $n \geqslant 2$ rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2007 r. (drugi dzień zawodów)

4. Udowodnić, że jeżeli a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $ad = b^2 + bc + c^2$, to liczba

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest złożona.

5. Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBN$ są rombami o bokach długości a. Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

6. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4.$$

Wykazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leqslant 2(a+b+c+d) - 4.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.