LVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2007 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

Rozwiązanie

Niech liczba rzeczywista a będzie wspólnym pierwiastkiem wielomianów $P(x)$ i $P(P(P(x)))$. Z równości $P(a)=0$ oraz $P(P(P(a)))=0$ otrzymujemy $P(P(0))=0$. Liczba całkowita $m=P(0)$ spełnia zatem warunki

$$P(m)=P(P(0))=0 \quad \text{oraz} \quad P(P(P(m)))=P(P(P(P(0))))=P(P(0))=0,$$

co oznacza, że m jest żądanym wspólnym pierwiastkiem całkowitym.

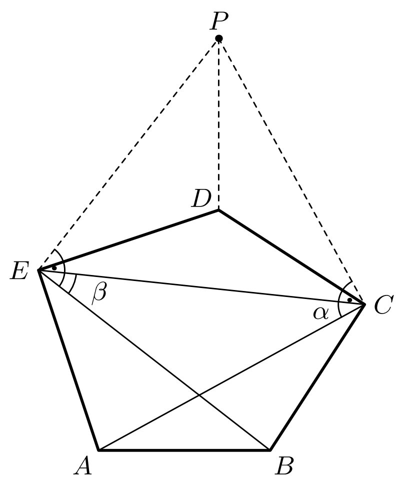
Zadanie **2.** Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$BC=CD, \quad DE=EA, \quad \sphericalangle BCD=\sphericalangle DEA=90^\circ.$$

Udowodnić, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt. Wyznaczyć miary jego kątów, znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC.

Rozwiązanie

Niech P będzie obrazem punktu B przy obrocie o kąt 90° wokół punktu E (rys. 1); wtedy oczywiście proste BE i EP są prostopadłe oraz $BE=EP$. Przy tym obrocie punkt A przechodzi na punkt D, a zatem trójkąty ABE oraz EDP są przystające. Stąd wynika, że $AB=DP$ oraz $\sphericalangle EAB=\sphericalangle EDP$.



rys. 1

W każdym pięciokącie suma kątów wewnętrznych wynosi 540°, a więc $\sphericalangle EAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE = 360^\circ$. Wobec tego

$$\sphericalangle PDC = 360^\circ - \sphericalangle EDC - \sphericalangle EDP = 360^\circ - \sphericalangle EDC - \sphericalangle EAB = \sphericalangle ABC\,.$$

Stąd oraz z zależności $AB = DP$ oraz $BC = DC$ wynika, że trójkąty PDC i ABC są przystające. A skoro punkt D przy obrocie o kąt 90° wokół punktu C przechodzi na punkt B, więc punkt P przy tym obrocie musi przejść na punkt A. Stąd wynika, że proste AC i PC są prostopadłe oraz $AC = PC$. Trójkąt EPC jest zatem zbudowany z odcinków o długościach AC, CE, EB.

Ponieważ proste BE i PE są prostopadłe, więc $\sphericalangle PEC = 90^\circ - \beta$. Analogicznie uzyskujemy $\sphericalangle ECP = 90^\circ - \alpha$. Wobec tego miary kątów trójkąta zbudowanego z odcinków AC, CE, EB wynoszą: $90^\circ - \beta$, $\alpha + \beta$, $90^\circ - \alpha$.

Zadanie **3.** Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n. Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: Wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P. Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę.

Dla każdego $n \geqslant 2$ rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

Rozwiązanie

Nazwijmy *odcinkiem granicznym* wspólny bok dwóch płytek, których widoczne strony mają różne kolory. Oczywiście liczba odcinków granicznych jest nieujemna i nie przekracza liczby m wszystkich odcinków będących wspólnym bokiem dwóch płytek. Zbadamy, jak zmienia się liczba odcinków granicznych w wyniku wykonania dozwolonego ruchu.

Każda z n^2 płytek ma wspólne boki z co najwyżej trzema innymi płytkami. Odwrócenie płytki jest dopuszczalne, jeżeli co najmniej dwa z takich boków są odcinkami granicznymi. Przypuśćmy, że odwracamy płytkę P. Wówczas odcinki graniczne mogą pojawić się albo zniknąć jedynie na bokach płytki P. Ponadto bok płytki P jest po odwróceniu odcinkiem granicznym wtedy i tylko wtedy, gdy przed odwróceniem nie był on odcinkiem granicznym. Wynika stąd, że w wyniku wykonania dozwolonego ruchu liczba odcinków granicznych zmniejsza się.

Udowodniliśmy w ten sposób, że z dowolnego początkowego ułożenia płytek można wykonać nie więcej niż m ruchów.

Odpowiedź: Dla żadnego $n \geqslant 2$ nie istnieje ułożenie pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2007 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Udowodnić, że jeżeli a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $ad=b^2+bc+c^2$, to liczba

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$

jest złożona.

Rozwiązanie

Z warunków zadania otrzymujemy równość $2ad=b^2+c^2+(b+c)^2$, a więc

$$(a+d)^2-(b+c)^2=(a+d)^2-2ad+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Z drugiej strony, z rozkładu różnicy kwadratów na czynniki mamy

$$(a+d)^2-(b+c)^2=(a+d+b+c)(a+d-b-c).$$

Łącząc powyższe zależności uzyskujemy

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(a+b+c+d)(a+d-b-c).$$

Czynnik $a+b+c+d$ jest liczbą całkowitą większą od 1. Gdyby był on równy $a^2+b^2+c^2+d^2$, to na mocy nierówności $k^2>k$ (prawdziwej dla $k>1$) otrzymalibyśmy równości $a=b=c=d=1$, jednakże liczby te nie spełniają warunków zadania. Zatem $a+b+c+d$ jest *właściwym* dzielnikiem liczby $a^2+b^2+c^2+d^2$, skąd wynika teza zadania.

Zadanie **5.** Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB\neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBN$ są rombami o bokach długości a. Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

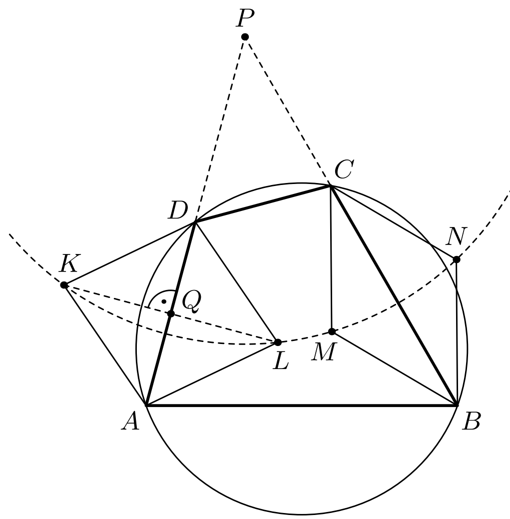
Rozwiązanie

Ponieważ cięciwy AB i CD są różnej długości, więc proste AD i BC nie są równoległe. Oznaczmy punkt ich przecięcia przez P (rys. 2). Wykażemy, że punkty K, L, M i N leżą na okręgu o środku P.

Prosta AD jest symetralną odcinka KL, a więc $PK=PL$. Analogicznie $PM=PN$. Wystarczy zatem wykazać, że $PK=PN$.

Oznaczmy przez Q punkt przecięcia przekątnych rombu $AKDL$. Wówczas na mocy twierdzenia Pitogarasa otrzymujemy

$$\begin{aligned}AP\cdot DP&=(PQ+AQ)(PQ-AQ)=PQ^2-AQ^2=\\&=PK^2-KQ^2-AQ^2=PK^2-AK^2.\end{aligned}$$



rys. 2

Analogicznie dowodzimy, że

$$BP\cdot CP = PN^2 - BN^2\,.$$

Punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu, więc $AP\cdot DP = BP\cdot CP$. W takim razie $PK^2 - AK^2 = PN^2 - BN^2$; a skoro $AK = BN = a$, więc w efekcie uzyskujemy równość $PK = PN$, która kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **6.** Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4.$$

Wykazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\leqslant 2(a+b+c+d)-4.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność

(1) $$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\leqslant\frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

Rzeczywiście, przekształcając równoważnie powyższą nierówność mamy

$$(x^3+y^3)(x+y)^3\leqslant 2(x^2+y^2)^3,$$
$$(x^3+y^3)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\leqslant 2x^6+6x^4y^2+6x^2y^4+2y^6,$$
$$3x^5y+2x^3y^3+3xy^5\leqslant x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6,$$
$$0\leqslant (x^3-y^3)^2-3xy(x-y)(x^3-y^3),$$
$$0\leqslant (x^3-y^3)(x-y)^3.$$

Ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż liczby $x-y$ oraz x^3-y^3 mają jednakowy znak.

Korzystając z zależności (1) widzimy, że zadanie będzie rozwiązane, jeżeli udowodnimy nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}\leqslant 2(a+b+c+d)-4.$$

Lewa strona powyższej nierówności jest równa

$$2(a+b+c+d)-\frac{2ab}{a+b}-\frac{2bc}{b+c}-\frac{2cd}{c+d}-\frac{2da}{d+a}.$$

Aby dokończyć rozwiązanie, wystarczy zatem dowieść, że

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2cd}{c+d}+\frac{2da}{d+a}\geqslant 4. \tag{2}$$

Jednakże na mocy łatwej do sprawdzenia nierówności $x+y\geqslant\dfrac{4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ mamy

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2cd}{c+d}\geqslant\frac{8}{\dfrac{a+b}{ab}+\dfrac{c+d}{cd}}=\frac{8}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}}=2,$$

$$\frac{2bc}{b+c}+\frac{2da}{d+a}\geqslant\frac{8}{\dfrac{b+c}{bc}+\dfrac{d+a}{da}}=\frac{8}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{a}}=2.$$

To uzasadnia nierówność (2), do której wcześniej został sprowadzony dowód tezy zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`