LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2007 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, odcinek CD jest wysokością, punkt E leży na boku AB, a punkt M jest środkiem odcinka CE. Prosta prostopadła do prostej OM i przechodząca przez punkt M przecina proste AC, BC odpowiednio w punktach K, L. Dowieść, że

$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}.$$

2. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *białą*, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy *czarnymi*.

Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.

3. Płaszczyznę podzielono prostymi poziomymi i pionowymi na kwadraty jednostkowe. W każdy kwadrat należy wpisać liczbę całkowitą dodatnią tak, by każda liczba całkowita dodatnia wystąpiła na płaszczyźnie dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić w taki sposób, aby każda napisana liczba była dzielnikiem sumy liczb wpisanych w cztery kwadraty sąsiednie.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2007 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Wyznaczyć liczbę możliwych wartości iloczynu $k \cdot m$, gdzie k, m są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności

$$n^2 \leqslant k \leqslant m \leqslant (n+1)^2.$$

5. W czworościanie $ABCD$ spełnione są zależności

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD,$$
$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC.$$

Udowodnić, że środek sfery opisanej na tym czworościanie leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi AB i CD.

6. Ciąg a_0, a_1, a_2, ... jest określony przez warunki: $a_0 = -1$ oraz

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \ldots + \frac{a_1}{n} + \frac{a_0}{n+1} = 0 \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Wykazać, że $a_n > 0$ dla $n \geqslant 1$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.