LVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2007 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, odcinek CD jest wysokością, punkt E leży na boku AB, a punkt M jest środkiem odcinka CE. Prosta prostopadła do prostej OM i przechodząca przez punkt M przecina proste AC, BC odpowiednio w punktach K, L. Dowieść, że

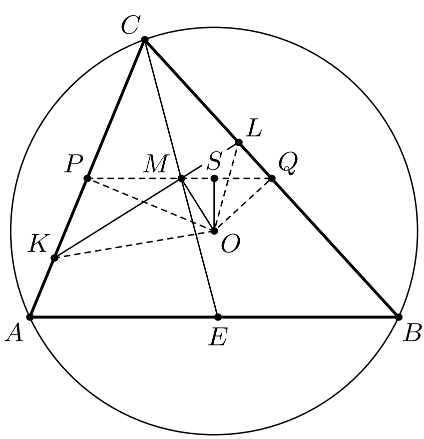
$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}.$$

Rozwiązanie

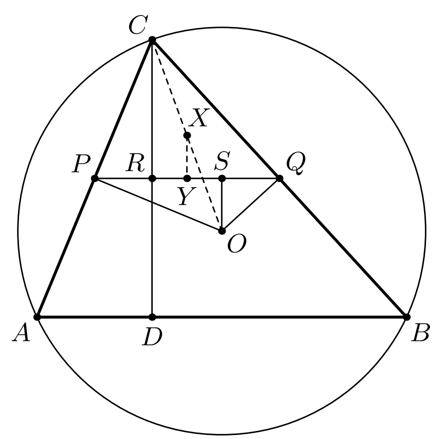
Poprowadźmy przez punkt M prostą równoległa do boku AB, która przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach P i Q (rys. 1). Wówczas punkty P i Q są odpowiednio środkami boków AC i BC. Ponieważ punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, więc $\sphericalangle APO = 90°$. Ponadto $\sphericalangle KMO = 90°$. Stąd wynika, że punkty K, P, M, O leżą na jednym okręgu, którego średnicą jest odcinek KO. Wobec tego $\sphericalangle OKM = \sphericalangle OPM$.

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle OLM = \sphericalangle OQM$. Z równości tych wynika, że trójkąty OKL i OPQ są podobne. Oznaczając zatem przez S rzut prostokątny punktu O na prostą PQ uzyskujemy

(1) $$\frac{LM}{MK} = \frac{QS}{SP}.$$



rys. 1



rys. 2

Oznaczmy przez X środek odcinka OC oraz niech Y, R będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów X i C na prostą PQ (rys. 2). Ponieważ $\sphericalangle OPC = \sphericalangle OQC = 90°$, więc punkty C, P, O, Q leżą na jednym okręgu, którego środkiem jest punkt X. Zatem $PX=XQ$, a więc $PY=YQ$. Ponadto punkt X jest środkiem odcinka OC, więc $RY=YS$. Stąd uzyskujemy $PR=QS$. Wobec tego

$$\frac{QS}{SP}=\frac{PR}{RQ}=\frac{AD}{DB}\,. \tag{2}$$

Łącząc równości (1) i (2) uzyskujemy tezę.

Zadanie **2.** Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *białą*, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy *czarnymi*.
Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.

Rozwiązanie

Dla liczby całkowitej $k>1$ oznaczmy

$$\begin{aligned} B(k)&=\text{ suma białych dzielników liczby } k,\\ C(k)&=\text{ suma czarnych dzielników liczby } k,\\ D(k)&=B(k)-C(k). \end{aligned}$$

Udowodnimy, że dla dowolnych względnie pierwszych liczb całkowitych dodatnich l, m prawdziwa jest równość

$$D(lm)=D(l)\cdot D(m). \tag{1}$$

Istotnie, każdy dodatni dzielnik d iloczynu lm ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $d=ab$, gdzie a jest dzielnikiem liczby l, zaś b jest dzielnikiem liczby m. Ponadto d jest dzielnikiem białym wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b mają ten sam kolor.

Suma wszystkich iloczynów postaci ab, gdzie a, b są odpowiednio białymi dzielnikami liczb l, m, jest równa $B(l)\cdot B(m)$, natomiast suma wszystkich takich iloczynów, w których dzielniki a, b są czarne, wynosi $C(l)\cdot C(m)$. Mamy zatem

$$B(lm)=B(l)\cdot B(m)+C(l)\cdot C(m). \tag{2}$$

Analogicznie uzasadniamy równość

$$C(lm)=B(l)\cdot C(m)+C(l)\cdot B(m). \tag{3}$$

Ze związków (2) i (3) wynika, że

$$\begin{aligned} D(lm)&=B(l)\cdot B(m)+C(l)\cdot C(m)-B(l)\cdot C(m)-C(l)\cdot B(m)=\\ &=(B(l)-C(l))(B(m)-C(m))=D(l)\cdot D(m), \end{aligned}$$

co kończy dowód zależności (1).

Przypuśćmy teraz, że suma białych dzielników pewnej liczby całkowitej $n>1$ jest równa sumie jej czarnych dzielników. Mamy więc $D(n)=0$. Rozłóżmy liczbę n na iloczyn potęg różnych liczb pierwszych:

$$n=p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdot\ldots\cdot p_j^{r_j}\,.$$

Na mocy wzoru (1) zachodzi równość

$$D(n)=D(p_1^{r_1})\cdot D(p_2^{r_2})\cdot\ldots\cdot D(p_j^{r_j})=0.$$

Wobec tego istnieje liczba pierwsza p i liczba całkowita dodatnia r, dla których $D(p^r)=0$. Jest to jednak niemożliwe: wszystkimi białymi dzielnikami liczby p^r są liczby 1, p^2, p^4, ..., a wszystkimi czarnymi dzielnikami — liczby p, p^3, p^5, ..., i w konsekwencji zachodzi równość

$$D(p^r)=1-p+p^2-p^3+\ldots+(-1)^r p^r,$$

zaś liczba stojąca po prawej stronie powyższej równości daje resztę 1 z dzielenia przez p, jest więc różna od zera. Doszliśmy zatem do sprzeczności.

Odpowiedź: Nie istnieje.

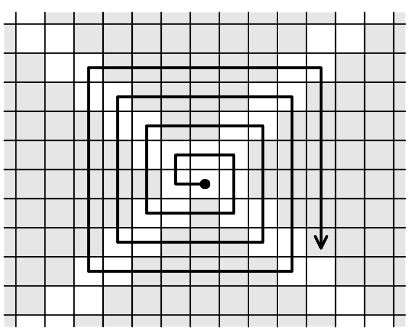
Zadanie **3.** Płaszczyznę podzielono prostymi poziomymi i pionowymi na kwadraty jednostkowe. W każdy kwadrat należy wpisać liczbę całkowitą dodatnią tak, by każda liczba całkowita dodatnia wystąpiła na płaszczyźnie dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić w taki sposób, aby każda napisana liczba była dzielnikiem sumy liczb wpisanych w cztery kwadraty sąsiednie.

Rozwiązanie

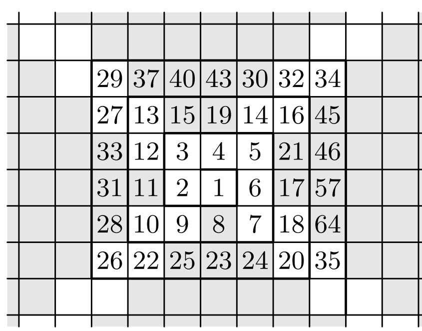
Udowodnimy, że istnieje postulowany sposób wpisania liczb.

Zacieniujmy niektóre kwadraty jednostkowe oraz narysujmy drogę przechodzącą przez każdy kwadrat dokładnie raz tak, jak pokazuje rys. 3. W kolejne kwadraty zaznaczonej drogi wpiszmy liczby według następujących zasad:

Startujemy z kwadratu zaznaczonego grubą kropką.



rys. 3



rys. 4

A) Jeżeli dany kwadrat nie jest zacieniowany, wpisujemy najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która nie została jeszcze napisana na płaszczyźnie.

B) Jeżeli dany kwadrat K jest zacieniowany, ma on bok wspólny z pewnym kwadratem H, w który jest już wpisana liczba. Wówczas wpisujemy w K najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią m nie występującą jeszcze na płaszczyźnie, że liczba wpisana w kwadrat H jest dzielnikiem sumy czterech liczb znajdujących się w kwadratach sąsiadujących z kwadratem H.

(Por. rys. 4, gdzie przedstawiono rezultat wykonywania kroków A) i B) dla kilkudziesięciu początkowych kwadratów na drodze.)

Zauważmy przede wszystkim, że liczba m zgodna z wymaganiami warunku B) zawsze istnieje. Rzeczywiście, ze sposobu zacieniowania kwadratów wynika, że w trzech kwadratach sąsiadujących z kwadratem K są już napisane liczby, powiedzmy a, b, c. Jeżeli zatem w kwadracie K znajduje się liczba d, to liczbę m musimy wybrać w taki sposób, by liczba $a+b+c+m$ dzieliła się przez d. Jest to możliwe, bowiem na płaszczyźnie wpisano dotąd skończenie wiele liczb.

Zatem postępując we wskazany sposób wpiszemy liczbę całkowitą dodatnią w każdy kwadrat na płaszczyźnie. Pozostaje wykazać, że ów sposób wpisania spełnia warunki zadania.

Ponieważ nieskończenie wiele kwadratów jest niezacieniowanych, krok A) zapewnia, że każda liczba całkowita w pewnym momencie pojawi się na płaszczyźnie. Ponadto w krokach A) i B) wybieramy za każdym razem liczbę, która dotąd nie została napisana. Wobec tego każda liczba całkowita dodatnia będzie wpisana w dokładnie jeden kwadrat. Na koniec, dla dowolnego kwadratu K, spośród czterech kwadratów sąsiadujących z K, kwadrat występujący na zaznaczonej drodze jako ostatni jest zacieniowany, a więc wpisanie liczby w ten kwadrat następuje na podstawie procedury B). Z treści tej procedury wnioskujemy, że liczba znajdująca się w kwadracie K jest dzielnikiem sumy czterech liczb wpisanych w kwadraty sąsiadujące z kwadratem K.

Wykazaliśmy tym samym, że opisany sposób rozmieszczania liczb w kwadratach spełnia warunki zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2007 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Dana jest liczba całkowita $n\geqslant 1$. Wyznaczyć liczbę możliwych wartości iloczynu $k\cdot m$, gdzie k, m są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności

(1) $$n^2\leqslant k\leqslant m\leqslant (n+1)^2.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dwie różne pary (k,m) i (k',m'), spełniające zadany warunek, dają jednakowy iloczyn $km=k'm'=q$. Oznaczmy

$$m+k=s,\qquad m-k=r,\qquad m'+k'=s',\qquad m'-k'=r'.$$

Wówczas $4q=s^2-r^2$, czyli $r=\sqrt{s^2-4q}$; różnica r' wyraża się analogicznie. Gdyby zachodziła równość $s=s'$, wynikałaby stąd także równość $r=r'$. To jednak nie jest możliwe, skoro pary (k,m) i (k',m') są różne. Zatem $s\neq s'$; nie tracąc ogólności przyjmijmy, że $s'\leqslant s-1$. Tak więc

(1) $$s^2-r^2=4q=4k'm'\leqslant (k'+m')^2\leqslant (s-1)^2=s^2-2s+1,$$

wobec czego

$$r^2+1\geqslant 2s=2(k+m)=2(2k+r)=4k+2r$$

i w konsekwencji $(r-1)^2\geqslant 4k\geqslant 4n^2$. Widać stąd, że r nie może być zerem. Zatem $r-1$ jest liczbą nieujemną i z ostatniej nierówności wynika, że $r-1\geqslant 2n$. To znaczy, że

(2) $$r\geqslant 2n+1.$$

Różnica liczb m, k z przedziału $\langle n^2;(n+1)^2\rangle$ nie może być większa niż jego długość, równa $2n+1$. Nierówność (2) musi więc być równością, a liczby k, m muszą pokrywać się z końcami tego przedziału.

Muszą ponadto zachodzić równości we wszystkich wcześniejszych nierównościach, z których zależność (2) została wyprowadzona. Równość w związkach (1) oznacza zaś, że $k'=m'=(s-1)/2$. Ostatecznie więc

$$k=n^2,\qquad m=(n+1)^2,\qquad k'=m'=n^2+n.$$

Znalezione pary (k,m) i (k',m') istotnie mają równe iloczyny $km=k'm'$; a z przeprowadzonego rozumowania wynika, że są to jedyne takie dwie różne pary.

W zbiorze $\{n^2,n^2+1,\ldots,(n+1)^2\}$ jest $2n+2$ liczb. Można z nich utworzyć $\binom{2n+2}{2}$ par (k,m), w których $k<m$, oraz $2n+2$ par, w których $k=m$; łącznie $2n^2+5n+3$ par. Wśród wyznaczonych przez nie wartości iloczynu

km występuje *dokładnie jedno* powtórzenie. Tak więc liczba możliwych wartości iloczynu km jest o jeden mniejsza i wynosi $2n^2+5n+2$.

Zadanie **5.** W czworościanie $ABCD$ spełnione są zależności

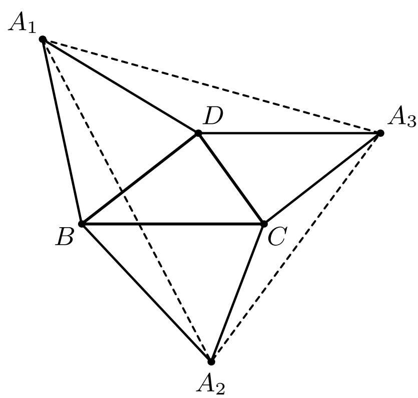
$$\sphericalangle BAC+\sphericalangle BDC=\sphericalangle ABD+\sphericalangle ACD,$$

$$\sphericalangle BAD+\sphericalangle BCD=\sphericalangle ABC+\sphericalangle ADC.$$

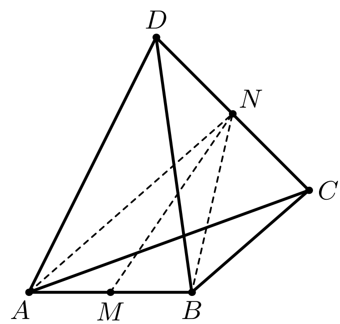
Udowodnić, że środek sfery opisanej na tym czworościanie leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi AB i CD.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy sześciokąt $A_1BA_2CA_3D$ będący siatką czworościanu $ABCD$ (rys. 5).



rys. 5



rys. 6

Przepisując pierwszą z danych w treści zadania równości jako

$$\sphericalangle A_1BD+\sphericalangle A_3CD=\sphericalangle BDC+\sphericalangle BA_2C$$

widzimy, że suma miar kątów A_1BA_2 i A_2CA_3 (traktowanych jako kąty wewnętrzne sześciokąta ABA_2CA_3D, a zatem niekoniecznie wypukłych) jest równa sumie miar kątów wewnętrznych trójkątów BDC i BA_2C, co daje

(1) $$\sphericalangle A_1BA_2+\sphericalangle A_2CA_3=360^\circ.$$

Ponieważ $BA_1=BA_2$ oraz $CA_2=CA_3$ (gdyż odpowiednie odcinki pochodzą z rozklejenia jednej krawędzi czworościanu), więc na mocy równości (1) trójkąty równoramienne A_1BA_2 i A_2CA_3 są podobne (przy czym mogą być zdegenerowane do odcinka). Wobec tego

(2) $$\frac{A_2A_1}{A_2B}=\frac{A_2A_3}{A_2C}.$$

Ponadto $\sphericalangle BA_2A_1=\sphericalangle CA_2A_3$, przy czym oba kąty są jednakowo zorientowane, skąd otrzymujemy

(3) $$\sphericalangle BA_2C=\sphericalangle A_1A_2A_3.$$

Z zależności (2) i (3) wynika, że trójkąty BA_2C oraz $A_1A_2A_3$ są podobne. Analogicznie korzystając z drugiej równości danej w treści zadania dowodzimy, iż trójkąty A_1BD i $A_1A_2A_3$ są podobne. Wobec tego podobne są trójkąty BA_2C i A_1BD; ze względu na równość $A_1B=BA_2$ są one przystające. Zatem

$$A_2C=BD \quad \text{oraz} \quad BC=A_1D. \tag{4}$$

Niech teraz punkty M, N będą odpowiednio środkami krawędzi AB, CD w czworościanie $ABCD$ (rys. 6). Na mocy (4) trójkąty BDC i ACD są przystające. Wobec tego odcinki BN i AN, będące odpowiednio środkowymi w tych trójkątach, mają równe długości. Innymi słowy, $AN=BN$, zatem w trójkącie równoramiennym ANB środkowa NM jest prostopadła do boku AB. Analogicznie rozpatrując trójkąt CMD dowodzimy, że $MN \perp CD$.

Prosta MN jest więc krawędzią przecięcia płaszczyzn symetralnych krawędzi AB i CD czworościanu $ABCD$. Środek sfery opisanej na czworościanie leży na każdej z tych płaszczyzn, zatem leży na prostej MN, co dowodzi tezy zadania.

Zadanie **6.** Ciąg a_0, a_1, a_2, ... jest określony przez warunki: $a_0=-1$ oraz

$$a_n+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}}{3}+\ldots+\frac{a_1}{n}+\frac{a_0}{n+1}=0 \qquad \text{dla } n\geqslant 1.$$

Wykazać, że $a_n>0$ dla $n\geqslant 1$.

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Liczba $a_1=\frac{1}{2}$ jest dodatnia. Przypuśćmy z kolei, że dla pewnego wskaźnika n liczby a_1, a_2, ..., a_n są dodatnie. Udowodnimy, że liczba a_{n+1} również jest dodatnia. W tym celu zauważmy, że prawdziwa jest zależność

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{k} \qquad \text{dla } k=1,2,\ldots,n,$$

gdyż jest ona równoważna nierówności $(n+1)k=nk+k\leqslant(k+1)n=nk+n$. Zatem korzystając z założenia indukcyjnego oraz z danej w treści zadania równości otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+2}&=a_{n+1}+\frac{a_n}{2}+\frac{a_{n-1}}{3}+\ldots+\frac{a_2}{n}+\frac{a_1}{n+1}\leqslant\\&\leqslant a_{n+1}+\frac{n}{n+1}\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{2}+\ldots+\frac{a_2}{n-1}+\frac{a_1}{n}\right)=\\&=a_{n+1}+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{-a_0}{n+1}=a_{n+1}+\frac{n}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Wobec tego spełniona jest nierówność

$$a_{n+1}\geqslant\frac{1}{n+2}-\frac{n}{(n+1)^2}=\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}>0,$$

która kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.