LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (10 września 2007 r. – 8 października 2007 r.)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^5 = 5y^3 - 4z \\ y^5 = 5z^3 - 4x \\ z^5 = 5x^3 - 4y \end{cases}$$

2. Dany jest kąt wypukły o wierzchołku P i punkt A leżący wewnątrz tego kąta. Punkty X i Y leżą na różnych ramionach tego kąta, przy czym $PX = PY$ oraz wartość sumy $AX + AY$ jest najmniejsza. Wykazać, że

$$\sphericalangle XAP = \sphericalangle YAP.$$

3. Ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, $\ldots$ jest określony przez warunki: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

$$a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2} \qquad \text{dla } n = 3, 4, 5, \ldots.$$

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $k \geqslant 2$, że liczba a_k jest dzielnikiem iloczynu $a_{k+1}a_{k+2}$.

4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Każdemu niepustemu podzbiorowi A zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ przyporządkowujemy liczbę $w(A)$ w następujący sposób: Jeżeli $a_1 > a_2 > \ldots > a_k$ są wszystkimi elementami zbioru A, to

$$w(A) = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{k+1} a_k.$$

Obliczyć sumę wszystkich $2^n - 1$ otrzymanych liczb $w(A)$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

8 października 2007 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (9 października 2007 r. – 12 listopada 2007 r.)

5. Znaleźć wszystkie takie trójki liczb pierwszych (p,q,r), że liczby

$$pq+qr+rp \qquad \text{oraz} \qquad p^3+q^3+r^3-2pqr$$

są podzielne przez $p+q+r$.

6. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$W(x^2)\cdot W(x^3)=(W(x))^5.$$

7. W n-osobowym stowarzyszeniu działa 2^n-1 komisji (każdy niepusty zbiór członków stowarzyszenia tworzy komisję). W każdej komisji należy wybrać przewodniczącego. Wymagany jest przy tym warunek: Jeżeli komisja C jest sumą $C=A\cup B$ dwóch komisji A i B, to przewodniczący komisji C jest też przewodniczącym co najmniej jednej z komisji A, B.

Wyznaczyć liczbę możliwych wyborów przewodniczących.

8. Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P. Dowieść, że

$$\sphericalangle APB+\sphericalangle CPD=180^\circ.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

12 listopada 2007 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

III seria (13 listopada 2007 r. – 10 grudnia 2007 r.)

9. Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą a o następującej własności:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, $z \geqslant a$ spełniających warunek $x+y+z=3$ prawdziwa jest nierówność

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3.$$

10. Dana jest liczba pierwsza p. Ciąg liczb całkowitych dodatnich a_1, a_2, a_3, ... spełnia warunek

$$a_{n+1}=a_n+p\left[\sqrt[p]{a_n}\,\right] \qquad \text{dla } n=1,2,3,\ldots.$$

Wykazać, że pewien wyraz tego ciągu jest p-tą potęgą liczby całkowitej. (*Uwaga:* Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x.)

11. Punkty P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, BC, CA, AB, BC trójkąta ABC, przy czym spełnione są równości

$$\sphericalangle P_1P_2C=\sphericalangle AP_2P_3=\sphericalangle P_3P_4B=\sphericalangle CP_4P_5=\sphericalangle P_5P_6A=\sphericalangle BP_6P_7=60^\circ.$$

Dowieść, że $P_1=P_7$.

12. Dana jest liczba całkowita $m \geqslant 2$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę całkowitą $n \geqslant m$, że dla każdego rozbicia zbioru $\{m, m+1, \ldots, n\}$ na dwa podzbiory, przynajmniej jeden z tych podzbiorów zawiera takie liczby a, b, c (niekoniecznie różne), że $ab=c$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 grudnia 2007 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

• Dla województwa pomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

• Dla województwa śląskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

• Dla województwa małopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

• Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1 (Wieżowiec Fizyki), 20-031 Lublin.

• Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

• Dla województwa wielkopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

• Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

• Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

• Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-956 Warszawa

• Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

---

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`