LIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2008 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Wyznaczyć największą możliwą długość ciągu kolejnych liczb całkowitych, z których każdą można przedstawić w postaci x^3+2y^2 dla pewnych liczb całkowitych x, y.

Rozwiązanie

Ciąg pięciu kolejnych liczb całkowitych -1, 0, 1, 2, 3 spełnia warunki zadania: istotnie, mamy

$$-1=(-1)^3+2\cdot 0^2, \qquad 0=0^3+2\cdot 0^2, \qquad 1=1^3+2\cdot 0^2,$$
$$2=0^3+2\cdot 1^2, \qquad 3=1^3+2\cdot 1^2.$$

Z drugiej strony, wśród dowolnych sześciu kolejnych liczb całkowitych istnieje liczba, powiedzmy m, która daje resztę 4 lub resztę 6 z dzielenia przez 8. Liczba m jest parzysta; gdyby więc istniało przedstawienie w postaci $m=x^3+2y^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y, to liczba x byłaby parzysta. Wówczas jednak uzyskalibyśmy podzielność $8\,|\,x^3$ i w efekcie liczby m i $2y^2$ dawałyby tę samą resztę (4 lub 6) z dzielenia przez 8. Wobec tego liczba y^2 dawałaby resztę 2 lub 3 z dzielenia przez 4. Jest to niemożliwe: równości

$$(2k)^2=4\cdot k^2, \qquad (2k+1)^2=4\cdot(k^2+k)+1$$

dowodzą, że kwadrat liczby całkowitej może dawać przy dzieleniu przez 4 tylko resztę 0 lub 1.

Wykazaliśmy tym samym, że wśród dowolnych sześciu kolejnych liczb całkowitych istnieje liczba, której nie da się przedstawić w postaci x^3+2y^2.

Odpowiedź: Największa możliwa długość takiego ciągu wynosi 5.

Zadanie **2.** W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są zależności

$$\sphericalangle ABD=\sphericalangle ACE, \qquad \sphericalangle ACB=\sphericalangle ACD,$$
$$\sphericalangle ADC=\sphericalangle ADE, \qquad \sphericalangle ADB=\sphericalangle AEC.$$

Odcinki BD i CE przecinają się w punkcie S. Dowieść, że proste AS i CD są prostopadłe.

Rozwiązanie

Z równości

$$\sphericalangle ABD=\sphericalangle ACE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ADB=\sphericalangle AEC$$

wynika (rys. 1), że trójkąty BAD i CAE są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). Podobieństwo tych trójkątów pozwala wnioskować, że

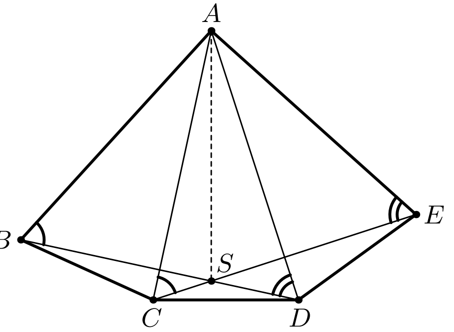
$$\sphericalangle BAC=\sphericalangle DAE \quad \text{oraz} \quad \frac{BA}{DA}=\frac{CA}{EA}.$$

Zależności te dowodzą, że trójkąty BAC i DAE są podobne (cecha *bok-kąt-bok*). W konsekwencji otrzymujemy

$$(1) \qquad \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADE = \sphericalangle ADC.$$

Ponadto prawdziwa jest zależność

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD,$$



rys. 1

która w połączeniu z równością (1) implikuje, że trójkąty ABC i ADC są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). Mają one jednak wspólny odpowiedni bok AC. Wobec tego trójkąty te są przystające i symetryczne względem prostej AC. Stąd wniosek, że proste AC i BD są prostopadłe.

Analogicznie dowodzimy, że proste AD i CE są prostopadłe. Zatem S jest punktem przecięcia wysokości trójkąta CAD. To oznacza, że prosta AS zawiera trzecią wysokość tego trójkąta, czyli jest prostopadła do prostej CD.

Zadanie **3.** Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$(1) \qquad f(f(x)-y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy $c = f(0)$. Podstawiając $x = y = 0$ w równości (1) otrzymujemy zależność $f(c) = f(f(0)) = 2f(0) = 2c$. Następnie kładąc $x = 0$ i $y = c$ stwierdzamy, że

$$c = f(0) = f(0) + f(f(c) - c) + 0 = c + f(2c - c) = c + f(c) = 3c.$$

Wynika stąd, że $c = 0$, czyli $f(0) = 0$.

Przyjmując teraz w warunku (1) wartość $x = 0$ widzimy, że

$$(2) \qquad f(-y) = f(f(y)) \qquad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } y.$$

Podstawmy z kolei $y = f(x)$ w równości (1). Wówczas na mocy własności (2) dla dowolnej wartości x dostajemy zależność

$$0 = f(0) = f(f(x) - f(x)) = f(x) + f(f(f(x)) - f(-x)) + x =$$
$$= f(x) + f(f(-x) - f(-x)) + x = f(x) + f(0) + x = f(x) + x.$$

Stąd $f(x) = -x$ dla każdej liczby rzeczywistej x i pozostaje bezpośrednio sprawdzić, że funkcja dana tym wzorem istotnie ma żądane własności.

Odpowiedź: Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = -x$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LIX Olimpiada Matematyczna

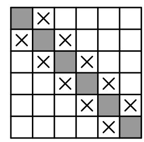
Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2008 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** W każdym polu kwadratowej tablicy o rozmiarach $n\times n$ napisana jest liczba całkowita. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: Wybieramy dowolne pole tabeli i zmniejszamy wpisaną weń liczbę o liczbę pól sąsiednich (mających wspólny bok z wybranym polem), zaś każdą z liczb wpisanych w pola sąsiednie zwiększamy o 1.

Dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 2$ rozstrzygnąć, czy z dowolnej początkowej tabeli, w której suma wszystkich n^2 liczb jest równa zeru, można otrzymać tabelę składającą się z samych zer.

Rozwiązanie



rys. 2

Niech P oznacza przekątną tabeli łączącą jej lewy górny róg z prawym dolnym rogiem. Udowodnimy, że w wyniku wykonania opisanej operacji nie zmienia się parzystość sumy liczb znajdujących się na przekątnej P (na rys. 2 pola leżące na przekątnej P są zacieniowane).

Dla każdego pola na przekątnej P liczba pól sąsiednich wynosi 2 albo 4 i żadne z nich nie leży na przekątnej P. Każde pole sąsiadujące z przekątną P (na rys. 2 takie pola oznaczone są krzyżykami) sąsiaduje z dokładnie dwoma polami leżącymi na przekątnej P. Pozostałe pola tabeli nie leżą na przekątnej P i z nią nie sąsiadują. Jeżeli więc suma liczb na przekątnej P przed wykonaniem operacji wynosiła s, to w wyniku jej wykonania suma ta będzie równa $s-4$, $s-2$, s lub $s+2$, czyli jej parzystość nie zmieni się.

Zatem jeśli na początku wpiszemy do tabeli liczbę 1 w lewym górnym rogu, liczbę -1 w polu leżącym w prawym górnym rogu oraz liczbę 0 w każde z pozostałych pól, to suma wszystkich liczb w tabeli będzie równa zeru, ale po wykonaniu dowolnej ilości operacji suma liczb leżących na przekątnej P będzie nieparzysta. Wobec tego nie jest możliwe, by przekątna P, a tym bardziej — cała tabela, składała się z samych zer.

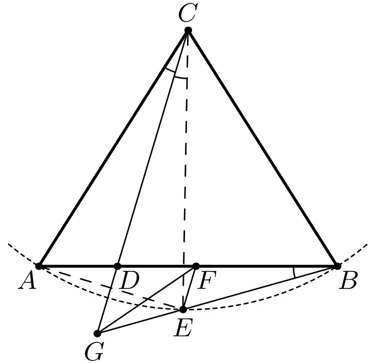
Odpowiedź: Dla każdego $n\geqslant 2$ istnieje początkowa tabela o sumie liczb równej zeru, z której nie można otrzymać tabeli złożonej z samych zer.

Zadanie **5.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Punkt D leży na boku AB tego trójkąta, przy czym $AD<BD$. Punkt E jest symetryczny do punktu A względem prostej CD. Wykazać, że

$$\frac{AC}{CD}=\frac{BE}{BD-AD}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez F punkt symetryczny do A względem punktu D (rys. 3). Na mocy nierówności $AD < BD$ punkt F znajduje się wewnątrz odcinka AB.



rys. 3

Ponieważ $AD = DF$ oraz punkty A i E są symetryczne względem prostej CD, więc stosując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa stwierdzamy, że $CD \parallel FE$. Stąd w szczególności wynika, że proste CD i BE nie są równoległe, zatem przecinają się one w pewnym punkcie G. Ponadto

(1) $$\sphericalangle BFE = \sphericalangle BDG = \sphericalangle CDA.$$

Dalej, zauważmy, że $CA = CB = CE$, punkty A, B i E leżą więc na okręgu o środku w punkcie C. Wobec tego otrzymujemy

(2) $$\sphericalangle ABE = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACD.$$

Łącząc równości (1) i (2) dochodzimy do wniosku, że trójkąty ACD i EBF są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). Zatem

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BE}{BF} = \frac{BE}{BD - AD}.$$

Zadanie **6.** Dana jest liczba całkowita dodatnia n niepodzielna przez 3. Udowodnić, że istnieje liczba m o następującej własności: Każda liczba całkowita nie mniejsza niż m jest sumą cyfr pewnej wielokrotności liczby n.

Rozwiązanie

Przez liczbę *dobrą* będziemy rozumieć taką liczbę całkowitą dodatnią, która jest sumą cyfr pewnej wielokrotności liczby n.

Zauważmy przede wszystkim, że suma dwóch liczb dobrych jest również liczbą dobrą. Rzeczywiście, niech k_1, k_2 będą wielokrotnościami liczby n o sumach cyfr odpowiednio równych s_1, s_2. Niech t będzie taką liczbą całkowitą, że $10^t > k_2$. Wówczas liczba $k = 10^t \cdot k_1 + k_2$ jest wielokrotnością liczby n, zaś suma cyfr liczby k jest równa $s_1 + s_2$, gdyż przy dodawaniu liczb $10^t \cdot k_1$ i k_2 niezerowe cyfry występują na różnych pozycjach.

Liczba n nie jest podzielna przez 3, zatem jej suma cyfr a także nie jest podzielna przez 3.

Niech teraz b będzie taką liczbą całkowitą, że $10^{3^b} > n$. Przyjmijmy, że kolejnymi cyframi zapisu dziesiętnego liczby n są cyfry $c_1, c_2, \ldots, c_\ell$. Możemy oczywiście przyjąć, że $c_\ell \neq 0$, gdyż podzielenie liczby n przez 10 nie zmienia warunków zadania. Wówczas kolejnymi cyframi zapisu dziesiętnego liczby

$(10^{3^b}-1)n = \underbrace{999\ldots99}_{3^b} \cdot n$, podzielnej przez n, są cyfry:

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{\ell-1},\ c_\ell-1,\ \underbrace{9,\ 9,\ \ldots,\ 9,\ 9}_{3^b-\ell},\ 9-c_1,\ 9-c_2,\ \ldots,\ 9-c_{\ell-1},\ 10-c_\ell.$$

Stąd wynika, że suma cyfr liczby $(10^{3^b}-1)n$ wynosi $9\cdot 3^b = 3^{b+2}$.

Udowodniliśmy zatem, iż liczbami dobrymi są: liczba a, która nie jest podzielna przez 3, oraz liczba 3^d, gdzie $d=b+2$.

Wykażemy, że każda liczba całkowita nie mniejsza niż $a\cdot 3^d$ jest dobra. Wyniknie stąd, że liczba $m=a\cdot 3^d$ spełnia tezę zadania.

Niech więc $s \geqslant a\cdot 3^d$ będzie dowolną liczbą całkowitą. Liczby

$$(*) \qquad s,\quad s-a,\quad s-2a,\quad \ldots,\quad s-(3^d-1)a$$

są wówczas dodatnie. Ponadto żadne dwie z nich nie dają tej samej reszty z dzielenia przez 3^d (gdyż podzielność $3^d \mid (s-ia)-(s-ja)=(j-i)a$ przy pewnych wskaźnikach $0\leqslant i,j\leqslant 3^d-1$ ze względu na niepodzielność liczby a przez 3 jest możliwa tylko wtedy, gdy $3^d \mid j-i$, co jednak pociąga $i=j$). Liczb wypisanych w ciągu $(*)$ jest 3^d, istnieje więc wśród nich liczba, która jest podzielna przez 3^d. Niech na przykład $s-va=w\cdot 3^d$. Wówczas $v,w\geqslant 0$ oraz

$$s=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{v}+\underbrace{3^d+3^d+\ldots+3^d}_{w}.$$

Liczby a i 3^d są dobre. Zatem z powyższego przedstawienia wnioskujemy, że liczba s jako suma liczb dobrych również jest dobra, a tego dowodziliśmy.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`