LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

9 kwietnia 2008 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. W pola tablicy rozmiaru $n \times n$ wpisane są liczby $1, 2, \ldots, n^2$, przy czym liczby $1, 2, \ldots, n$ znajdują się w pierwszym wierszu (od strony lewej do prawej), liczby $n+1, n+2, \ldots, 2n$ w drugim, itd.

Wybrano n pól tablicy, z których żadne dwa nie leżą w jednym wierszu ani w jednej kolumnie. Niech a_i będzie liczbą znajdującą się w tym wybranym polu, które leży w wierszu o numerze i. Dowieść, że

$$\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \ldots + \frac{n^2}{a_n} \geqslant \frac{n+2}{2} - \frac{1}{n^2+1}.$$

2. Funkcja $f(x,y,z)$ trzech zmiennych rzeczywistych spełnia dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zależność

$$f(a,b,c)+f(b,c,d)+f(c,d,e)+f(d,e,a)+f(e,a,b)=a+b+c+d+e.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 5)$ prawdziwa jest równość

$$f(x_1,x_2,x_3)+f(x_2,x_3,x_4)+\ldots+f(x_n,x_1,x_2)=x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

3. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$, w którym $BC=DE$, zachodzą równości

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle CAB = \sphericalangle AED - 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADE.$$

Dowieść, że czworokąt $BCDE$ jest równoległobokiem.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

10 kwietnia 2008 r. (drugi dzień zawodów)

4. Każdy punkt płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych pomalowano na biało albo na czarno. Dowieść, że ze zbioru wszystkich pomalowanych punktów można wybrać nieskończony podzbiór, który ma środek symetrii i którego wszystkie punkty mają ten sam kolor.

5. Pola wszystkich przekrojów równoległościanu $\mathcal{R}$ płaszczyznami przechodzącymi przez środki trzech jego krawędzi, z których żadne dwie nie są równoległe i nie mają punktów wspólnych, są równe. Udowodnić, że równoległościan $\mathcal{R}$ jest prostopadłościanem.

6. Niech S będzie zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które można przedstawić w postaci a^2+5b^2 dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych a i b. Niech ponadto p będzie liczbą pierwszą dającą resztę 3 z dzielenia przez 4. Wykazać, że jeżeli pewna dodatnia wielokrotność liczby p należy do zbioru S, to również liczba $2p$ należy do zbioru S.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.