LIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego

9 kwietnia 2008 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** W pola tablicy rozmiaru $n\times n$ wpisane są liczby 1, 2, ..., n^2, przy czym liczby 1, 2, ..., n znajdują się w pierwszym wierszu (od strony lewej do prawej), liczby $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ w drugim, itd.
Wybrano n pól tablicy, z których żadne dwa nie leżą w jednym wierszu ani w jednej kolumnie. Niech a_i będzie liczbą znajdującą się w tym wybranym polu, które leży w wierszu o numerze i. Dowieść, że

$$\frac{1^2}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\ldots+\frac{n^2}{a_n}\geqslant\frac{n+2}{2}-\frac{1}{n^2+1}.$$

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw, że

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\tfrac{1}{2}n(n^2+1). \tag{1}$$

Niech b_i oznacza numer kolumny, w której znajduje się liczba a_i. Wówczas

$$a_i=(i-1)n+b_i \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Z warunków zadania wynika, że ciąg $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ jest permutacją ciągu $(1,2,\ldots,n)$. Wobec tego

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=1+2+\ldots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

i z uwagi na wzór (2) dowód zależności (1) sprowadza się do rachunku

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\ldots+a_n&=(0+1+\ldots+(n-1))n+b_1+b_2+\ldots+b_n=\\&=\tfrac{1}{2}(n-1)n^2+\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{2}n(n^2+1).\end{aligned}$$

Korzystając teraz z równości (1) oraz z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i harmoniczną otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1^2}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\frac{3^2}{a_3}+\ldots+\frac{n^2}{a_n}&=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\frac{3}{a_3}+\frac{3}{a_3}+\frac{4}{a_4}+\ldots+\frac{n}{a_n}\geqslant\\&\geqslant\frac{(1+2+3+\ldots+n)^2}{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\frac{a_3}{3}+\frac{a_3}{3}+\frac{a_4}{4}+\ldots+\frac{a_n}{n}}=\\&=\frac{(\frac{n(n+1)}{2})^2}{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}=\frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{\frac{1}{2}n(n^2+1)}=\\&=\frac{n(n+1)^2}{2(n^2+1)}=\frac{(n+2)(n^2+1)-2}{2(n^2+1)}=\\&=\frac{n+2}{2}-\frac{1}{n^2+1},\end{aligned}$$

czyli tezę zadania.

Zadanie **2.** Funkcja $f(x,y,z)$ trzech zmiennych rzeczywistych spełnia dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zależność

$$f(a,b,c)+f(b,c,d)+f(c,d,e)+f(d,e,a)+f(e,a,b)=a+b+c+d+e.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, $\ldots$, x_n $(n \geqslant 5)$ prawdziwa jest równość

$$f(x_1,x_2,x_3)+f(x_2,x_3,x_4)+\ldots+f(x_n,x_1,x_2)=x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

Rozwiązanie

Podstawiając $a=b=c=d=e=0$ w danym w treści zadania warunku dostajemy $f(0,0,0)=0$.

Niech teraz s, t, u będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas

$$f(s,t,u)+f(t,u,0)+f(u,0,0)+f(0,0,s)+f(0,s,t)=s+t+u,$$
$$f(0,t,u)+f(t,u,0)+f(u,0,0)+f(0,0,0)+f(0,0,t)=t+u.$$

Odejmując powyższe dwie równości stronami i wykorzystując udowodnioną wcześniej równość $f(0,0,0)=0$ otrzymujemy

(1) $$f(s,t,u)=s+f(0,0,t)-f(0,0,s)+f(0,t,u)-f(0,s,t).$$

Wypisując równość (1) dla trójek $(s,t,u)=(x_k,x_{k+1},x_{k+2})$ dla $k=1,2,\ldots,n$ (gdzie przyjmujemy $x_{n+1}=x_1$, $x_{n+2}=x_2$) i sumując stronami uzyskanych w ten sposób n równości dostajemy tezę zadania.

Zadanie **3.** W pięciokącie wypukłym $ABCDE$, w którym $BC=DE$, zachodzą równości

$$\measuredangle ABE=\measuredangle CAB=\measuredangle AED-90^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle ACB=\measuredangle ADE.$$

Dowieść, że czworokąt $BCDE$ jest równoległobokiem.

Rozwiązanie

Zauważmy przede wszystkim (rys. 1), że jeżeli punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt XYZ, to zachodzi równość

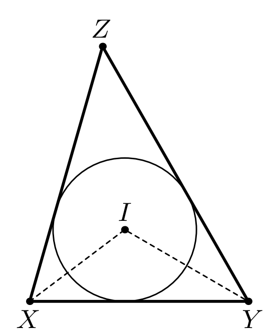
$$\measuredangle XIY=90^\circ+\tfrac{1}{2}\measuredangle Z.$$

Dla dowodu wystarczy zobaczyć, że

$$\measuredangle IXY=\tfrac{1}{2}\measuredangle X, \quad \measuredangle IYX=\tfrac{1}{2}\measuredangle Y,$$

a więc

$$\measuredangle XIY=180^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle X-\tfrac{1}{2}\measuredangle Y=$$
$$=180^\circ-(90^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle Z)=90^\circ+\tfrac{1}{2}\measuredangle Z.$$

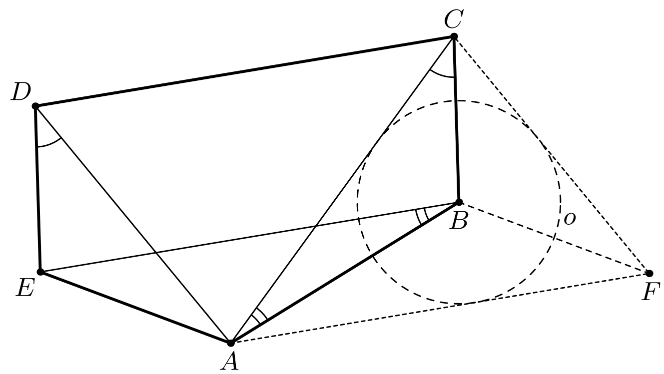


rys. 1

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Oznaczmy

$$\alpha=\measuredangle ADE=\measuredangle ACB, \qquad \beta=\measuredangle ABE=\measuredangle CAB.$$

Niech o oznacza okrąg o środku w punkcie B styczny do prostej AC (rys. 2). Niech ponadto styczne do okręgu o przechodzące przez punkty A i C (różne od prostej AC) przecinają się w punkcie F. Punkt ten leży po tej samej stronie prostej AC, co punkt B, gdyż $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA = \alpha + \beta < 90^\circ$ ze względu na to, że α i $90^\circ + \beta$ są kątami wewnętrznymi trójkąta DEA.



rys. 2

Wówczas okrąg o jest wpisany w trójkąt AFC, zatem na mocy początkowej obserwacji mamy

$$\sphericalangle FBC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\sphericalangle FAC = 90^\circ + \beta = \sphericalangle AED.$$

Ponieważ także $\sphericalangle FCB = \sphericalangle ACB = \alpha = \sphericalangle ADE$ oraz $BC = DE$, więc trójkąty FBC i AED są przystające (cecha *kąt-bok-kąt*) i jednakowo zorientowane. To oznacza, że spełniona jest równość $FB = AE$. Zauważmy następnie, że

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle BAC = \beta = \sphericalangle ABE.$$

W efekcie proste AF i EB są równoległe; wraz z zależnością $FB = AE$ daje to, że czworokąt $AFBE$ jest trapezem równoramiennym albo równoległobokiem.

Pierwsza z tych ewentualności zachodzić jednak nie może, gdyż na podstawie spostrzeżenia z początku rozwiązania oznaczałaby ona, że

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle EBF = \sphericalangle EBA + \sphericalangle ABF = \beta + 90^\circ + \alpha,$$

skąd uzyskalibyśmy

$$90^\circ + \beta = \sphericalangle AED > \sphericalangle AEB = 90^\circ + \beta + \alpha,$$

a to jest oczywista niedorzeczność.

Zatem czworokąt $AFBE$ jest równoległobokiem, czyli proste AE i BF są równoległe. To dowodzi, że trójkąt FBC powstaje z trójkąta AED w wyniku przesunięcia o wektor $\vec{EB}$. Zatem odcinki ED i BC również są równoległe, a to z uwagi na równość ich długości pociąga za sobą tezę zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

10 kwietnia 2008 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Każdy punkt płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych pomalowano na biało albo na czarno. Dowieść, że ze zbioru wszystkich pomalowanych punktów można wybrać nieskończony podzbiór, który ma środek symetrii i którego wszystkie punkty mają ten sam kolor.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa.

Rozpatrzmy symetrię środkową względem punktu $(0,0)$. Ponieważ nie istnieje nieskończony zbiór symetryczny względem tego punktu i złożony z punktów jednego koloru, więc tylko skończenie wiele punktów o obu współrzędnych całkowitych przechodzi przy tej symetrii na punkty tego samego koloru. Wobec tego istnieje taka liczba całkowita M, że dla każdego punktu o współrzędnych całkowitych (x,y), przy czym $|y|>M$, punkty $(-x,-y)$ i (x,y) mają różne kolory.

Rozważając analogicznie symetrię środkową względem punktu $(\frac{1}{2},0)$ widzimy, że istnieje taka liczba całkowita N, że dla każdego punktu o współrzędnych całkowitych (x,y), przy czym $|y|>N$, punkt (x,y) ma inny kolor niż jego obraz przez rozpatrywaną symetrię, czyli punkt $(-x+1,-y)$.

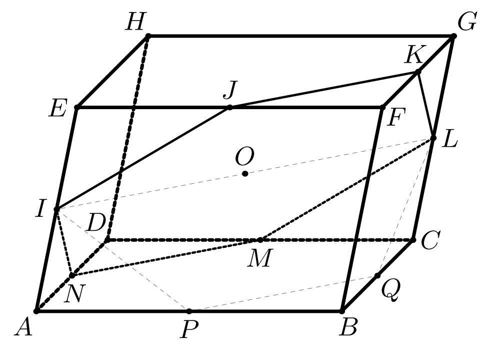
Przyjmijmy $k=\max\{M,N\}+1$ i rozpatrzmy dowolną liczbę całkowitą s. Wówczas punkt (s,k) przy symetrii względem punktu $(0,0)$ przechodzi na punkt $(-s,-k)$, który jest przeciwnego koloru niż punkt (s,k). Ponadto punkt $(-s,-k)$ przy symetrii względem punktu $(\frac{1}{2},0)$ przechodzi na punkt $(s+1,k)$, który jest przeciwnego koloru niż punkt $(-s,-k)$. Wobec tego punkty (s,k) i $(s+1,k)$ mają jednakowy kolor. Ponieważ s było dowolną liczbą całkowitą, więc wynika stąd, że wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej całkowitej i drugiej współrzędnej równej k mają ten sam kolor. Jednakże punkty te tworzą nieskończony zbiór, którego środkiem symetrii jest punkt $(0,k)$. Otrzymana sprzeczność z założeniem nie wprost kończy rozwiązanie.

Zadanie **5.** Pola wszystkich przekrojów równoległościanu $\mathcal{R}$ płaszczyznami przechodzącymi przez środki trzech jego krawędzi, z których żadne dwie nie są równoległe i nie mają punktów wspólnych, są równe. Udowodnić, że równoległościan $\mathcal{R}$ jest prostopadłościanem.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że pola wszystkich przekrojów, o których mowa w treści zadania, są równe S.

Niech $ABCD$ i $EFGH$ będą podstawami równoległościanu $\mathcal{R}$ (rys. 3), niech O będzie jego środkiem symetrii i niech I, J, K, L, M, N oznaczają odpowiednio środki krawędzi AE, EF, FG, GC, CD, DA. Wówczas następujące pary punktów: I i L, J i M, K i N, są symetryczne względem punktu O.



rys. 3

Płaszczyzna π przechodząca przez punkty I, K, M w przekroju z równoległościanem $\mathcal{R}$ wyznacza figurę o polu S. Wykażemy, że figurą tą jest sześciokąt $IJKLMN$.

Oznaczmy przez π' płaszczyznę przechodzącą przez punkty I, N, M. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $NM \parallel AC \parallel IL$. Prosta NM i punkt I leżą w płaszczyźnie π', zatem prosta przechodząca przez punkt I i równoległa do prostej NM (czyli prosta IL) również leży w płaszczyźnie π'. Stąd wniosek, że środek O odcinka IL leży w płaszczyźnie π'. To z kolei oznacza, że punkty J i K, symetryczne względem punktu O odpowiednio do punktów M i N, również leżą w płaszczyźnie π'. Skutkiem tego punkty I, J, K, L, M, N leżą w tej płaszczyźnie; tworzą one więc płaski sześciokąt o środku symetrii O.

Ponadto płaszczyzny π i π' mają trzy niewspółliniowe punkty wspólne: I, K oraz M. To dowodzi, że $\pi = \pi'$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że punkt O jest środkiem symetrii sześciokąta $IJKLMN$ o polu S. Zatem czworokąt $ILMN$ ma pole równe $\frac{1}{2}S$; jest on ponadto trapezem, gdyż wykazaliśmy wcześniej, że proste IL i MN są równoległe. Jeżeli przez P i Q oznaczymy odpowiednio środki krawędzi AB i BC, to przeprowadzając analogiczne rozumowanie uzasadniamy, że czworokąt $ILQP$ jest trapezem o polu $\frac{1}{2}S$.

Trapezy $ILMN$ i $ILQP$ mają więc równe pola; mają one ponadto wspólną podstawę IL oraz równe drugie podstawy ($NM = PQ = \frac{1}{2}AC$). Wynika stąd, że trapezy te mają równe wysokości. Inaczej mówiąc, odległości prostej IL od prostych NM i PQ są jednakowe.

Jeżeli ℓ_1, ℓ_2 są różnymi równoległymi prostymi w przestrzeni, to każda prosta do nich równoległa i jednakowo od nich oddalona jest zawarta w płaszczyźnie Π, względem której proste ℓ_1 i ℓ_2 są symetryczne. Płaszczyzna Π jest ponadto prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez proste ℓ_1 i ℓ_2.

Wobec tego proste AC i IL, równoodległe od prostych NM i PQ, wyznaczają płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny $MNPQ$. Innymi słowy, płaszczyzna π_1 zawierająca równoległobok $ACGE$ jest prostopadła do podstawy $ABCD$. Analogicznie wykazujemy, że płaszczyzna π_2 zawierająca równoległobok $BFHD$ jest prostopadła do podstawy $ABCD$. Stąd wniosek, że krawędź płaszczyzn π_1 i π_2, która jest prostą równoległą do AE, jest prostopadła do podstawy $ABCD$. Otrzymujemy stąd równości $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EAD = 90°$.

Podobnie dowodzimy, że $\sphericalangle DAB = 90°$. Zatem równoległościan $\mathcal{R}$ jest prostopadłościanem.

Zadanie **6.** Niech S będzie zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które można przedstawić w postaci a^2+5b^2 dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych a i b. Niech ponadto p będzie liczbą pierwszą dającą resztę 3 z dzielenia przez 4. Wykazać, że jeżeli pewna dodatnia wielokrotność liczby p należy do zbioru S, to również liczba $2p$ należy do zbioru S.

Rozwiązanie

Na mocy warunków zadania liczba a^2+5b^2 jest podzielna przez p dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych a i b.

Liczba b nie jest podzielna przez p; w przeciwnym przypadku z podzielności $p\,|\,b$ oraz $p\,|\,a^2+5b^2$ uzyskalibyśmy bowiem $p\,|\,a$, wbrew względnej pierwszości liczb a i b.

Zatem żadna z $p-1$ liczb: b, $2b$, ..., $(p-1)b$ nie jest podzielna przez p. Ponadto liczby te dają różne reszty z dzielenia przez p. Istotnie, jeżeli mamy $p\,|\,ib-jb=(i-j)b$ dla pewnych wskaźników $1\leqslant i,j\leqslant p-1$, to liczba pierwsza p jest dzielnikiem różnicy $i-j$, skąd wynika, że $i=j$. W konsekwencji jedna z rozpatrywanych liczb daje resztę 1 z dzielenia przez p. Przyjmijmy, że jest to liczba kb (dla pewnej wartości $k\in\{1,2,\ldots,p-1\}$). Wówczas mamy

$$p\,|\,k^2(a^2+5b^2)=(ak)^2+5(bk)^2, \qquad \text{czyli} \qquad p\,|\,m^2+5, \quad \text{gdzie} \quad m=ak.$$

Niech z oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą $\sqrt{p}$. Rozpatrzmy zbiór reszt z dzielenia liczb 0, m, $2m$, ..., zm przez p. Uporządkujmy te $z+1$ reszt w kolejności niemalejącej otrzymując ciąg $r_1\leqslant r_2\leqslant\ldots\leqslant r_{z+1}$. Wtedy każda z $z+1$ liczb:

$$r_2-r_1, \quad r_3-r_2, \quad \ldots, \quad r_{z+1}-r_z, \quad p-(r_{z+1}-r_1)$$

jest nieujemna, a ich suma wynosi p. Wynika stąd, że przynajmniej jedna z tych liczb jest nie większa niż

$$\frac{p}{z+1}=\frac{(z+(p-z))^2}{z+1}<\frac{(z+1)^2}{z+1}=z+1.$$

Zatem wśród liczb r_2-r_1, r_3-r_2, ..., $r_{z+1}-r_z$, $p-(r_{z+1}-r_1)$ można wskazać liczbę nie przekraczającą z. To zaś oznacza, że pewne dwie różne liczby, powiedzmy cm i dm $(0\leqslant c,d\leqslant z)$, dają przy dzieleniu przez p reszty różniące się nie więcej niż o z, albo różniące się przynajmniej o $p-z$. Przyjmijmy $y=|c-d|$; wówczas jedna z liczb ym, $-ym$ daje resztę $x \leqslant z$ z dzielenia przez p. Ponieważ $p\,|\,m^2+5$, więc liczby

$$x^2+5y^2 \quad \text{i} \qquad x^2-m^2y^2=(x-my)(x+my)$$

dają taką samą resztę z dzielenia przez p. Jeden z czynników $x-my$, $x+my$ jest jednak podzielny przez p. W efekcie $p\,|\,x^2+5y^2$. Ponadto $0 \leqslant x \leqslant z$ oraz $0 \leqslant y \leqslant z$, co w połączeniu z nierównością $z<\sqrt{p}$ daje

$$x^2+5y^2 \leqslant 6z^2 < 6(\sqrt{p})^2 = 6p.$$

Stąd wniosek, że x^2+5y^2 jest jedną z liczb p, $2p$, $3p$, $4p$ lub $5p$.

Równość $x^2+5y^2=p$ oznaczałaby, że liczba x^2+5y^2 daje resztę 3 z dzielenia przez 4. To jednak nie jest możliwe, gdyż liczby x^2 i $5y^2$ dają reszty 0 lub 1 z dzielenia przez 4. Zatem $x^2+5y^2 \neq p$. To dowodzi także, że nie mogą mieć miejsca równości $x^2+5y^2=4p$ ani $x^2+5y^2=5p$. Pierwsza z tych równości oznaczałaby bowiem, że liczby x i y są parzyste (w żadnym innym przypadku liczba x^2+5y^2 nie jest podzielna przez 4) oraz $(\frac{1}{2}x)^2+5(\frac{1}{2}y)^2=p$; druga równość prowadzi natomiast do wniosku, że $5\,|\,x$ oraz $y^2+5(\frac{1}{5}x)^2=p$. W obu przypadkach dochodzimy do sprzeczności z udowodnionym wcześniej faktem, że liczba postaci e^2+5f^2 jest różna od p dla dowolnych całkowitych wartości e i f.

Stwierdziliśmy w ten sposób, że $x^2+5y^2=2p$ lub $x^2+5y^2=3p$.

Przypuśćmy, że $x^2+5y^2=3p$. Wówczas liczby x i y nie są podzielne przez 3 (w przeciwnym razie mielibyśmy $3\,|\,x$ oraz $3\,|\,y$, jednakże wówczas $3^2\,|\,x^2+5y^2=3p$; co może się zdarzyć jedynie w przypadku $p=3$, ale wtedy uzyskujemy następującą sprzeczność: $9=3p=x^2+5y^2 \geqslant 3^2+5\cdot 3^2=54$). Zmieniając ewentualnie znaki liczb x i y możemy przyjąć, że x i y są liczbami całkowitymi dającymi resztę 1 z dzielenia przez 3. Ponadto

$$18p=6\cdot 3p=6(x^2+5y^2)=(x+5y)^2+5(x-y)^2.$$

Liczby $x+5y$ i $x-y$ są podzielne przez 3; jeżeli więc $x+5y=3g$ oraz $x-y=3h$, to z powyższej równości wnioskujemy, że $2p=g^2+5h^2$.

Ostatecznie udowodniliśmy, że liczba $2p$ daje się przedstawić w postaci s^2+5t^2 dla pewnych liczb całkowitych s i t. Pozostaje zauważyć, że w takiej sytuacji liczby s i t są względnie pierwsze; gdyby bowiem miały one wspólny dzielnik pierwszy q, to uzyskalibyśmy $q^2\,|\,s^2+5t^2=2p$, co prowadzi do sprzeczności, gdyż p jest nieparzystą liczbą pierwszą. Zatem dowód relacji $2p \in S$ jest zakończony.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`