LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

I seria (4 września 2008 r. – 3 października 2008 r.)

1. Na niektórych polach szachownicy rozmiaru $m \times n$ ustawiono wieże. Wiadomo, że dowolna wieża znajduje się w polu rażenia co najwyżej dwóch innych wież.

Wyznaczyć, w zależności od $m, n \geqslant 2$, największą liczbę wież na szachownicy, dla której taka sytuacja jest możliwa.

2. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Niech $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}$ będą odpowiednio resztami z dzielenia liczb

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad \ldots, \quad 1+2+\ldots+(n-1)$$

przez n. Znaleźć wszystkie takie wartości n, że ciąg $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1})$ jest permutacją ciągu $(1, 2, 3, \ldots, n-1)$.

3. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty M, N, J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, DEF. Dowieść, że punkty F i J są symetryczne względem prostej MN.

4. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$4(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3}) \leqslant 4c^3 + (a+b)^3.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem **poleconym** *na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia*

3 października 2008 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (4 października 2008 r. – 3 listopada 2008 r.)

5. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ wyznaczyć największą możliwą liczbę różnych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$ o następującej własności: Dowolne dwa z tych podzbiorów albo są rozłączne, albo jeden z nich zawiera się w drugim.

6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = AC$. Na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$ obrano odpowiednio takie punkty K i L leżące poza bokami trójkąta, że

$$4 \cdot BK \cdot CL = BC^2.$$

Punkt M jest środkiem boku BC. Proste KM i LM przecinają po raz drugi okrąg opisany na trójkącie AKL odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

7. Ciąg liczb całkowitych f_0, f_1, f_2, $\ldots$ jest określony przez warunki: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \text{dla } n = 2,3,4,\ldots.$$

Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, mające następującą własność: Dla każdego $n = 0,1,2,\ldots$ istnieje taka liczba całkowita k, że $W(k) = f_n$.

8. Przekątne podstawy $ABCD$ ostrosłupa $ABCDS$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie H, będącym spodkiem wysokości ostrosłupa. Niech K, L, M, N będą rzutami prostokątnymi punktu H odpowiednio na ściany ABS, BCS, CDS, DAS. Dowieść, że proste KL, MN i AC są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem **poleconym** *na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia*

3 listopada 2008 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (4 listopada 2008 r. – 3 grudnia 2008 r.)

9. Dana jest tablica 2008×2008. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy, z których każdy polega na wybraniu białego albo czarnego pionka i postawieniu go na wybranym wolnym polu. Wygrywa ten, którego ruch doprowadził do powstania ciągu 5 kolejnych pionków tego samego koloru w linii pionowej, poziomej lub ukośnej.

Zbadać, czy istnieje strategia dla gracza rozpoczynającego grę zapewniająca mu zwycięstwo.

10. Punkt P jest środkiem krótszego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Punkt M jest środkiem odcinka łączącego środki dwóch okręgów dopisanych do danego trójkąta, stycznych odpowiednio do boków AB i AC. Wykazać, że $PM = 2 \cdot BP$.

11. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $k > m \geqslant 1$ spełniona jest nierówność

$$\frac{\sqrt[k]{k!}}{\sqrt[m]{m!}} < \frac{k}{m}.$$

12. Dana jest liczba pierwsza p. Po lewej stronie tablicy napisano liczby $1, 2, 3, \ldots, p-1$, zaś po prawej stronie liczbę 0. Wykonujemy ciąg $p-1$ ruchów, z których każdy przebiega następująco: Wybieramy jedną z liczb napisanych po lewej stronie tablicy, dodajemy ją do wszystkich pozostałych liczb na tablicy, po czym wymazujemy wybraną liczbę.

Rozstrzygnąć, dla jakich wartości p można w kolejnych ruchach wybierać liczby w taki sposób, by liczba pozostała na tablicy po wykonaniu wszystkich ruchów była podzielna przez p.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem **poleconym** *na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia*

3 grudnia 2008 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

- Dla województwa śląskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

- Dla województw lubelskiego i podkarpackiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województw łódzkiego i świętokrzyskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

- Dla województw lubuskiego i zachodniopomorskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10.

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej, ul. Janiszewskiego 14a, 50-370 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`