LX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(4 września 2008 r. – 3 grudnia 2008 r.)

Zadanie **1.** Na niektórych polach szachownicy rozmiaru $m\times n$ ustawiono wieże. Wiadomo, że dowolna wieża znajduje się w polu rażenia co najwyżej dwóch innych wież.
Wyznaczyć, w zależności od $m,n\geqslant 2$, największą liczbę wież na szachownicy, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $m+n$ wież.

Udowodnimy najpierw, że na prostokątnej szachownicy $m\times n$ $(m,n\geqslant 1)$ można ustawić najwyżej $m+n$ wież tak, by każda wieża znajdowała się w polu rażenia nie więcej niż dwóch innych. Dowód przeprowadzimy na trzy sposoby.

Sposób I

Nazwijmy wiersz *związanym*, jeżeli w wierszu tym ustawiona jest wieża w znajdująca się w polu rażenia dwóch innych wież stojących w tej samej kolumnie, co wieża w. Analogicznie kolumną *związaną* nazywamy kolumnę, która zawiera wieżę będącą w polu rażenia dwóch wież z tego samego wiersza.

Z warunków zadania wynika, że każda związana linia (wiersz lub kolumna) zawiera dokładnie jedną wieżę. Niech s i t oznaczają odpowiednio liczbę wierszy i kolumn związanych. Wówczas liczba wszystkich wież znajdujących się w związanych liniach nie przekracza $s+t$.

Z drugiej strony, weźmy pod uwagę zbiór pól szachownicy nie znajdujących się w żadnej związanej linii. Pola takie nazwijmy *niezwiązanymi*. Z określenia kolumn związanych wynika, że w każdym wierszu najwyżej dwie wieże rozmieszczone są na polach niezwiązanych — mogą to bowiem być tylko „skrajne” wieże stojące w tym wierszu. Ponadto wszystkie pola niezwiązane zawarte są w $m-s$ niezwiązanych wierszach. Zatem liczba wież znajdujących się na niezwiązanych polach jest nie większa niż $2(m-s)$. Podobnie uzasadniamy, że liczba tych wież nie przekracza $2(n-t)$.

Korzystając z nierówności $2\cdot\min\{x,y\}\leqslant x+y$ stwierdzamy ostatecznie, że liczba wszystkich wież na szachownicy jest nie większa niż

$$s+t+2\cdot\min\{m-s,n-t\}\leqslant s+t+(m-s)+(n-t)=m+n.$$

Sposób II

Weźmy pod uwagę *odcinki brzegowe*, czyli boki pól danej szachownicy zawarte w jej brzegu. Liczba odcinków brzegowych jest równa $2(m+n)$.

Wieża stojąca na szachownicy wyznacza cztery odcinki brzegowe: dwa na górnym i dolnym końcu zajętej przez nią kolumny oraz dwa na lewym i prawym końcu zajętego przez nią wiersza. Odcinek brzegowy wyznaczony przez wieżę znajduje się *w polu rażenia* tej wieży, jeżeli w linii (pionowej bądź poziomej) pomiędzy wieżą a odcinkiem nie znajduje się żadna inna wieża.

Odcinek brzegowy wyznacza jednoznacznie linię (wiersz albo kolumnę), w którym musi stać wieża mająca ten odcinek w polu rażenia. Jeżeli w linii tej stoją przynajmniej dwie wieże, dany odcinek znajduje się w polu rażenia tylko jednej z nich, a mianowicie wieży najbliższej odcinkowi. Każdy odcinek brzegowy szachownicy znajduje się więc w polu rażenia najwyżej jednej wieży.

Z drugiej strony, zgodnie z warunkami zadania każda wieża znajduje się w polu rażenia najwyżej dwóch innych wież. Oznacza to, że w polu rażenia dowolnej wieży znajdują się przynajmniej dwa odcinki brzegowe. Jak wykazaliśmy wcześniej, odcinki znajdujące się w polu rażenia różnych wież są różne. Ponieważ zaś liczba odcinków brzegowych wynosi $2(m+n)$, liczba wież na szachownicy nie może przekraczać $m+n$.

Sposób III

Tym razem zastosujemy indukcję ze względu na wielkość sumy $m+n$.

Jeżeli przynajmniej jedna z liczb m, n jest równa 1, to rozpatrywana teza jest prawdziwa, gdyż liczba wszystkich pól szachownicy wynosi wówczas $m+n-1$ i tym bardziej liczba wież nie może przekraczać $m+n-1$.

Weźmy teraz pod uwagę szachownicę rozmiaru $m \times n$ (gdzie $m,n \geqslant 2$) z t wieżami rozmieszczonymi zgodnie z warunkami zadania.

Przypuśćmy najpierw, że w pewnym wierszu znajdują się przynajmniej trzy wieże. W wierszu tym znajdują się zatem dwie wieże „skrajne” oraz co najmniej jedna wieża „środkowa”. Niech w oznacza jedną z wież „środkowych”. Wieża w znajduje się wówczas w polu rażenia dwóch wież stojących w tym samym wierszu, co oznacza, że w kolumnie K zajętej przez wieżę w nie mogą stać żadne inne wieże. Wykreślając z szachownicy kolumnę K otrzymujemy szachownicę rozmiaru $m\times(n-1)$ z $t-1$ wieżami spełniającymi dany w treści zadania warunek. Na mocy założenia indukcyjnego mamy więc

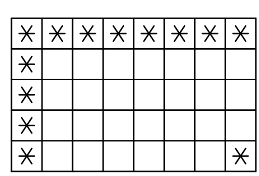
$$t-1 \leqslant m+(n-1) = m+n-1.$$

To daje $t \leqslant m+n$, a więc uzyskaliśmy tezę indukcyjną.

Podobne rozumowanie przeprowadzamy, gdy istnieje kolumna zawierająca przynajmniej trzy wieże.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdują się najwyżej dwie wieże. Wtedy jednak łączna ich liczba nie przekracza $2\cdot\min\{m,n\} \leqslant m+n$.

By zakończyć rozwiązanie, należy jeszcze wskazać żądane rozmieszczenie $m+n$ wież na szachownicy rozmiaru $m\times n$, gdzie $m,n \geqslant 2$. Można je uzyskać stawiając wieże na lewym i górnym brzegu szachownicy oraz w prawym dolnym rogu (rys. 1).



rys. 1

Zadanie **2.** Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Niech r_1, r_2, r_3, ..., r_{n-1} będą odpowiednio resztami z dzielenia liczb

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad \ldots, \quad 1+2+\ldots+(n-1)$$

przez n. Znaleźć wszystkie takie wartości n, że ciąg $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ jest permutacją ciągu $(1, 2, \ldots, n-1)$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $n = 2^k$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Wykażemy najpierw, że potęgi dwójki spełniają warunki zadania. W tym celu wystarczy udowodnić, że jeżeli $n = 2^k$ dla pewnego całkowitego $k \geqslant 1$, to reszty r_1, r_2, ..., r_{n-1} są parami różne i żadna z nich nie jest równa zeru.

Gdyby któraś z tych reszt, powiedzmy r_m, była równa zeru, to liczba

$$1+2+\ldots+m = \frac{m(m+1)}{2}$$

byłaby podzielna przez 2^k. Zatem dla pewnej wartości $m \in \{1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$ iloczyn $m(m+1)$ byłby podzielny przez 2^{k+1}. Lecz jedna z liczb m, $m+1$ jest parzysta, a druga — nieparzysta. Stąd jedna z nich musiałaby być podzielna przez 2^{k+1}, wbrew temu, że obie te dodatnie liczby nie przekraczają 2^k.

Gdyby z kolei dwie z rozważanych reszt były równe — powiedzmy $r_l = r_m$, gdzie $1 \leqslant l < m \leqslant n-1$, wówczas liczba

$$(1+2+\ldots+m) - (1+2+\ldots+l) = \frac{m(m+1)}{2} - \frac{l(l+1)}{2} = \frac{(m-l)(m+l+1)}{2}$$

byłaby podzielna przez 2^k, a więc iloczyn $(m-l)(m+l+1)$ byłby podzielny przez 2^{k+1}. Suma tych czynników wynosi $2m+1$, jest więc liczbą nieparzystą. Tak jak wcześniej wynika stąd, że jedna z liczb $m-l$, $m+l+1$ musi być podzielna przez 2^{k+1}. Jednakże liczby l i m są różne, dodatnie i mniejsze od 2^k, i podobnie jak poprzednio otrzymujemy sprzeczność.

Aby dokończyć rozwiązanie zadania, wystarczy dowieść, że gdy liczba n ma nieparzysty dzielnik pierwszy p, to ciąg $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ nie jest permutacją ciągu $(1, 2, \ldots, n-1)$. Zauważmy w tym celu, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej t liczby

$$1+2+\ldots+(tp-2)+(tp-1) = \frac{tp(tp-1)}{2},$$

$$1+2+\ldots+(tp-1)+tp = \frac{tp(tp+1)}{2}$$

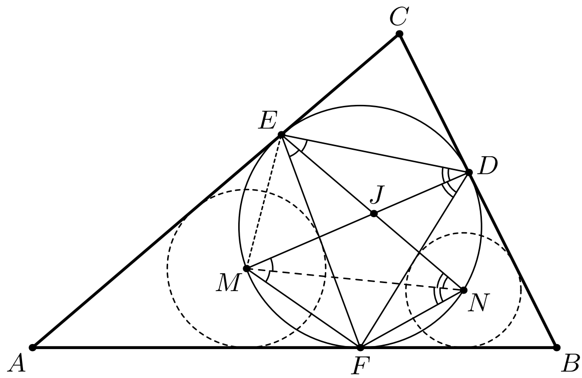
są podzielne przez p, gdyż nieparzysty czynnik pierwszy p w liczniku nie skraca się z mianownikiem. W związku z tym reszty

$$r_{p-1}, \quad r_p, \quad r_{2p-1}, \quad r_{2p}, \quad r_{3p-1}, \quad r_{3p}, \quad \ldots, \quad r_{n-p-1}, \quad r_{n-p}, \quad r_{n-1}$$

są podzielne przez p. Zatem w ciągu $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ co najmniej $2 \cdot \frac{n}{p} - 1$ liczb jest podzielnych przez p. W ciągu $(1, 2, \ldots, n-1)$ występuje zaś jedynie $\frac{n}{p} - 1$ liczb podzielnych przez p. Tak więc liczba n nie ma żądanej własności.

Zadanie **3.** Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty M, N, J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, DEF. Dowieść, że punkty F i J są symetryczne względem prostej MN.

Rozwiązanie



rys. 2

Udowodnimy najpierw, że punkty M i N są odpowiednio środkami krótszych łuków FE i FD okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Rzeczywiście, niech M' będzie środkiem krótszego łuku FE tego okręgu. Prosta AC jest doń styczna w punkcie E, zatem (rys. 2)

(1) $$\sphericalangle AEM' = \sphericalangle EFM'.$$

Ponieważ punkt M' jest środkiem łuku EF, więc trójkąt $EM'F$ jest równoramienny. Wobec tego $\sphericalangle EFM' = \sphericalangle FEM'$, co wraz z równością (1) dowodzi, że punkt M' leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle AEF$. Analogicznie dowodzimy, iż punkt ten leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle AFE$, więc pokrywa się on ze środkiem M okręgu wpisanego w trójkąt AEF. Podobnie rozumujemy dla punktu N.

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie DEF. Skoro M jest środkiem krótszego łuku EF tego okręgu, prosta DM zawiera dwusieczną kąta $\sphericalangle EDF$. Na tej prostej leży więc punkt J, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten kąt. Analogicznie dochodzimy do wniosku, że punkt J leży na prostej EN.

Aby uzasadnić, że punkty J i F są symetryczne względem prostej MN, wystarczy wykazać, iż trójkąty MFN oraz MJN są przystające, gdyż będzie to oznaczało, że są one symetryczne względem prostej MN. Mamy jednak

$$\sphericalangle JMN = \sphericalangle DMN = \sphericalangle FMN,$$

gdzie druga równość wynika z tego, że N jest środkiem łuku FD. Podobnie dostajemy $\sphericalangle JNM = \sphericalangle FNM$. Trójkąty MFN i MJN mają więc równe odpowiednie kąty oraz wspólny bok MN, zatem są przystające (cecha *kąt-bok-kąt*). Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie **4.** Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$4(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3}) \leqslant 4c^3+(a+b)^3.$$

Rozwiązanie

Korzystając z nierówności $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$ prawdziwej dla dowolnych liczb nieujemnych x, y otrzymujemy

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) \geqslant a^3+b^3+3ab\cdot 2\sqrt{ab} = a^3+b^3+6\sqrt{a^3b^3}.$$

Wobec tego teza zadania wynika z następującego rachunku:

$$\begin{aligned}
4c^3+(a+b)^3-4(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3}) &\geqslant \\
&\geqslant 4c^3+a^3+b^3+6\sqrt{a^3b^3}-4(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3}) = \\
&= 4c^3+a^3+b^3+2\sqrt{a^3b^3}-4\sqrt{b^3c^3}-4\sqrt{c^3a^3} = \\
&= (2\sqrt{c^3}-\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Zadanie **5.** Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ wyznaczyć największą możliwą liczbę różnych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$ o następującej własności: Dowolne dwa z tych podzbiorów są rozłączne lub jeden z nich zawiera się w drugim.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $2n$ podzbiorów.

Oznaczmy szukaną liczbę podzbiorów przez a_n.

Nietrudno spostrzec, że dla $n=1,2,3,\ldots$ następujące $2n$ podzbiorów zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$ ma daną w treści zadania własność:

$$\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \ldots,\ \{n\},\ \{1,2\},\ \{1,2,3\},\ \ldots,\ \{1,2,3,\ldots,n\}.$$

Rzeczywiście, dowolny z pierwszych $n+1$ zbiorów ma najwyżej jeden element, zatem zawiera się w każdym zbiorze, z którym nie jest rozłączny. Natomiast dla dowolnych dwóch spośród pozostałych $n-1$ zbiorów ten zbiór, który w powyższym ciągu jest wypisany wcześniej, zawiera się w drugim zbiorze.

Udowodniliśmy w ten sposób, że

$$a_n \geqslant 2n \qquad \text{dla } n=1,2,3,\ldots. \tag{1}$$

Z drugiej strony, niech B_1, B_2, $\ldots$, B_t będą różnymi podzbiorami zbioru $\{1,2,\ldots,m\}$ o własności opisanej w treści zadania. Jeżeli wśród wypisanych podzbiorów nie występuje zbiór $\{1,2,\ldots,m\}$, to możemy go dopisać zwiększając o 1 liczbę tych podzbiorów i nie naruszając prawdziwości postulowanego warunku. Przyjmijmy więc, że $B_t = \{1,2,\ldots,m\}$.

Spośród zbiorów B_1, B_2, $\ldots$, B_{t-1} wybierzmy ten, który ma najwięcej elementów. Dla ustalenia uwagi niech będzie to B_1 i niech d oznacza liczbę jego elementów. Wówczas $d < n$. Ponadto równość $d=0$ oznacza, że B_1 jest zbiorem pustym, co z uwagi na wybór zbioru B_1 jest możliwe jedynie wtedy, gdy $t=2$. W dalszej części rozumowania przyjmujemy więc, że $0<d<n$.

Na mocy określenia zbioru B_1 każdy ze zbiorów B_i $(i=1,2,\ldots,t-1)$ albo jest podzbiorem zbioru B_1, albo też jest z nim rozłączny. Dokonując przenumerowania możemy założyć, iż zbiory B_1, B_2, ..., B_r są podzbiorami zbioru B_1, natomiast zbiory B_{r+1}, B_{r+2}, ..., B_{t-1} są rozłączne z B_1.

Zbiory B_1, B_2, ..., B_r są różnymi podzbiorami d-elementowego zbioru B_1, z których dowolne dwa albo są rozłączne, albo jeden zawiera się w drugim. Wynika stąd nierówność $r\leqslant a_d$. Wśród $t-r-1$ zbiorów B_{r+1}, B_{r+2}, ..., B_{t-1} dowolne dwa albo są rozłączne, albo jeden zawiera się w drugim, przy czym są one podzbiorami $(m-d)$-elementowego zbioru $\{1,2,\ldots,m\}\setminus B_1$, a ponadto nie występuje wśród nich zbiór pusty, jest on bowiem podzbiorem B_1. Stąd otrzymujemy $t-r-1\leqslant a_{m-d}-1$ i w konsekwencji

$$t=r+(t-r-1)+1\leqslant a_d+(a_{m-d}-1)+1=a_d+a_{m-d}.$$

Skutkiem tego liczba podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,m\}$ o żądanej własności nie przekracza liczby a_d+a_{m-d}.

Wykazaliśmy zatem, że a_m nie przekracza największej z liczb

$$a_d+a_{m-d} \qquad \text{dla } d=1,2,\ldots,m-1.$$

Jeżeli więc w nierówności (1) równość ma miejsce dla $n=1,2,\ldots,m-1$, to ma ona miejsce również dla $n=m$. Skoro dla $n=1$ nierówność (1) staje się równością, stosując indukcję stwierdzamy ostatecznie, że

$$a_n=2n \qquad \text{dla } n=1,2,3,\ldots.$$

Zadanie **6.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=AC$. Na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$ obrano odpowiednio takie punkty K i L leżące poza bokami trójkąta, że

(1) $$4\cdot BK\cdot CL=BC^2.$$

Punkt M jest środkiem boku BC. Proste KM i LM przecinają po raz drugi okrąg opisany na trójkącie AKL odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

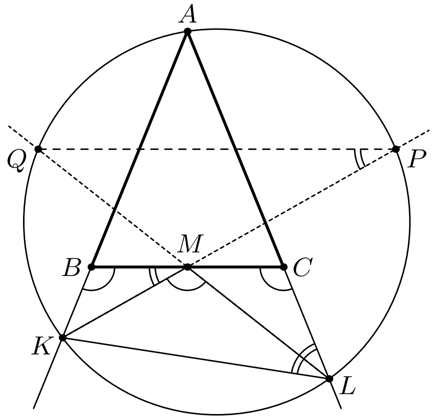
Rozwiązanie

Na mocy zależności (1) mamy (rys. 3)

(2) $$\frac{BM}{BK}=\frac{BC}{2\cdot BK}=\frac{2\cdot CL}{BC}=\frac{CL}{CM}.$$

Ponadto z założeń zadania wynika, że trójkąt BAC jest równoramienny, skąd uzyskujemy równość kątów $\sphericalangle KBM=\sphericalangle MCL$. Wraz z warunkiem (2) oznacza to, że trójkąty KBM i MCL są podobne (cecha *bok-kąt-bok*). Korzystając z tego podobieństwa otrzymujemy

(3) $$\sphericalangle KML=180^\circ-\sphericalangle BMK-\sphericalangle LMC=180^\circ-\sphericalangle BMK-\sphericalangle MKB=\sphericalangle KBM$$



rys. 3

oraz

(4) $$\frac{KM}{ML} = \frac{KB}{MC} = \frac{KB}{BM}.$$

Zależności (3) i (4) dowodzą, że trójkąty KML i KBM są podobne (cecha *bok-kąt-bok*), co implikuje równość

(5) $$\sphericalangle BMK = \sphericalangle MLK.$$

Z drugiej strony równość kątów wpisanych opartych na tym samym łuku daje

(6) $$\sphericalangle MLK = \sphericalangle QLK = \sphericalangle QPK.$$

Łącząc zależności (5) i (6) stwierdzamy, że $\sphericalangle BMK = \sphericalangle QPK$, skąd wprost wynika równoległość prostych BC i PQ.

Zadanie **7.** Ciąg liczb całkowitych f_0, f_1, f_2, ... jest określony przez warunki: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$,

(1) $$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, mające następującą własność: Dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$ istnieje taka liczba całkowita k, że $W(k) = f_n$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $W(x) = \varepsilon x + c$, gdzie $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ oraz c jest liczbą całkowitą.

Skorzystamy wielokrotnie z następującego faktu: jeżeli F jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, to dla dowolnych różnych liczb całkowitych u, v spełniona jest podzielność $u - v \mid F(u) - F(v)$.

Dla dowodu tego faktu wystarczy zauważyć, że jeżeli $F(x)$ jest sumą jednomianów postaci $a_m x^m$, gdzie współczynniki a_m są całkowite, to różnica $F(u) - F(v)$ jest sumą wyrażeń postaci $a_m(u^m - v^m)$, a każda liczba postaci $u^m - v^m$ jest podzielna przez $u - v$.

Ponadto będziemy stosować następujące własności ciągu f_0, f_1, f_2, ...:

1. Liczby f_1, f_2, f_3, ... są dodatnie.

2. Ciąg f_2, f_3, f_4, ... jest ściśle rosnący.

3. Dla $n=2,3,4,\ldots$ zachodzi nierówność $f_{n-1} \geqslant \frac{1}{2} f_n$.

4. Dla $n=4,5,6,\ldots$ zachodzi nierówność $f_{n+1} < 3f_{n-1}$.

Rzeczywiście, własność **1.** jest oczywista i pociąga za sobą własność **2.**, gdyż dla $n \geqslant 3$ mamy $f_{n-2} > 0$, co daje $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} > f_{n-1}$. Wreszcie własności **3.** i **4.** wynikają z własności **2.**, na mocy wzoru (1) mamy bowiem $2f_{n-1} \geqslant f_{n-1} + f_{n-2} = f_n$ dla $n \geqslant 2$ oraz

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = 2f_{n-1} + f_{n-2} < 2f_{n-1} + f_{n-1} = 3f_{n-1} \quad \text{dla } n \geqslant 4.$$

Przechodzimy do zasadniczej części rozwiązania.

Niech W będzie wielomianem spełniającym warunki zadania. Istnieje więc liczba całkowita a, dla której $W(a) = f_0 = 0$, oraz liczba całkowita b, dla której $W(b) = f_1 = 1$. Na podstawie sformułowanego wyżej faktu różnica $W(b) - W(a) = 1$ jest podzielna przez $b - a$. Stąd wniosek, że $b - a = \pm 1$, czyli $b = a + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon \in \{1, -1\}$. W tej sytuacji wielomian P określony wzorem

$$P(x) = W(a + \varepsilon x) \tag{2}$$

spełnia zależności $P(0) = W(a) = 0$ i $P(1) = W(a+\varepsilon) = W(b) = 1$. Nietrudno ponadto spostrzec, że zbiory wartości wielomianów W i P przyjmowanych dla całkowitych argumentów są równe. Innymi słowy, dla każdego $n = 0,1,2,\ldots$ istnieje taka liczba całkowita k, że $P(k) = f_n$.

Niech d i e będą takimi liczbami całkowitymi, że $P(d) = f_3 = 2$ oraz $P(e) = f_4 = 3$. Wówczas

$$d - 1 \mid P(d) - P(1) = 2 - 1 = 1, \qquad \text{skąd } d \in \{0, 2\};$$

wartość $d = 0$ wykluczamy, gdyż $P(0) = 0 \neq 2$. Zatem $d = 2$; podobnie

$$e - 2 \mid P(e) - P(2) = 3 - 2 = 1, \qquad \text{skąd } e \in \{1, 3\}$$

i w efekcie $e = 3$. Doszliśmy w ten sposób do wniosku, że

$$P(k) = k \qquad \text{dla } k = 0,1,2,3. \tag{3}$$

Wykażemy przez indukcję, że

$$P(f_n) = f_n \qquad \text{dla } n = 0,1,2,\ldots. \tag{4}$$

Prawdziwość związku (4) dla $n \leqslant 4$ wynika wprost z relacji (3). Przyjmijmy z kolei, iż równość (4) jest spełniona dla $n = 0,1,\ldots,m$, gdzie $m \geqslant 4$; należy dowieść, że $P(f_{m+1}) = f_{m+1}$.

Na podstawie założeń zadania istnieje liczba całkowita k, dla której $P(k) = f_{m+1}$. Przypuśćmy najpierw, że $k < f_{m-1}$; na mocy własności **3.** uzasadnionej na początku rozwiązania oraz nierówności $m - 1 > 2$ mamy wtedy

$$f_m - k > f_m - f_{m-1} = f_{m-2} \geqslant \tfrac{1}{2} f_{m-1},$$

a ponadto ma miejsce podzielność

$$f_m - k \mid P(f_m) - P(k) = f_m - f_{m+1} = -f_{m-1}.$$

Liczba $f_m - k$ jest więc dzielnikiem liczby f_{m-1} większym od jej połowy, co implikuje równość $f_m - k = f_{m-1}$. Wówczas jednak $k = f_m - f_{m-1} = f_{m-2}$, co nie jest możliwe, gdyż założenie indukcyjne orzeka, że $P(f_{m-2}) = f_{m-2}$, natomiast $P(k) = f_{m+1}$.

Udowodniliśmy tym samym, że $k \geqslant f_{m-1}$. Ponieważ na mocy własności **4.** oraz warunku $m \geqslant 4$ dostajemy

$$f_{m+1} = f_m + f_{m-1} = 2f_{m-1} + f_{m-2} < 3f_{m-1},$$

wiec nierówność $k \geqslant f_{m-1}$ pociąga za sobą nierównosć $k > \frac{1}{3} f_{m+1}$. Z drugiej strony, spełniona jest podzielność

$$k = k - 0 \,|\, P(k) - P(0) = f_{m+1} - 0 = f_{m+1}.$$

W konsekwencji liczba k jest dzielnikiem liczby f_{m+1} większym od jej jednej trzeciej. Zatem $k = f_{m+1}$ lub $k = \frac{1}{2} f_{m+1}$. Pierwszy przypadek prowadzi do wniosku, że $P(f_{m+1}) = f_{m+1}$, co jest tożsame z tezą indukcyjną. Natomiast drugi przypadek jest niemożliwy: wynikałoby zeń bowiem, że $k = 1$ lub

$$k - 1 = \tfrac{1}{2} f_{m+1} - 1 \,|\, P(k) - P(1) = f_{m+1} - 1 = 2(\tfrac{1}{2} f_{m+1} - 1) + 1 = 2(k-1) + 1,$$

a zatem $k - 1 \,|\, 1$, czyli $k \leqslant 2$. W rezultacie $f_{m+1} = 2k \leqslant 4 < f_5$, co przeczy założeniu $m \geqslant 4$.

To kończy rozumowanie indukcyjne.

Udowodniona właśnie zależność (4) wraz z własnością **2.** pozwala stwierdzić, że równość $P(x) = x$ zachodzi dla nieskończenie wielu liczb całkowitych x. Skoro P jest wielomianem, równość ta jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x. Uwzględniając równość (2) dostajemy teraz

$$W(x) = \varepsilon(x - a) \tag{5}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x, gdzie $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ oraz a jest liczbą całkowitą.

By zakończyć rozwiązanie, pozostaje już tylko spostrzec, że każdy wielomian postaci (5) ma żądaną własność.

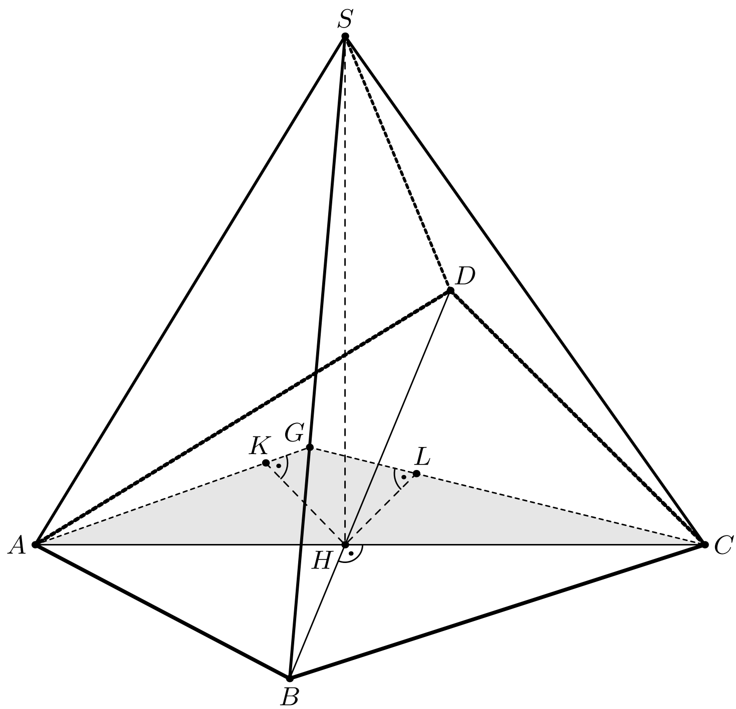
Zadanie **8.** Przekątne podstawy $ABCD$ ostrosłupa $ABCDS$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie H, będącym spodkiem wysokości ostrosłupa. Niech K, L, M, N będą rzutami prostokątnymi punktu H odpowiednio na ściany ABS, BCS, CDS, DAS. Dowieść, że proste KL, MN i AC są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Na początku wykażemy, że proste KL i AC leżą w jednej płaszczyźnie.

Z założeń zadania wynika, że proste AC, BD i HS są wzajemnie prostopadłe. Oznacza to, że dowolna prosta zawarta w płaszczyźnie wyznaczonej przez dwie z tych prostych jest prostopadła do trzeciej. W szczególności prosta SB jest prostopadła do prostej AC i wobec tego istnieje płaszczyzna π przechodząca przez prostą AC i prostopadła do prostej SB.

Ponieważ prosta SB jest zawarta w płaszczyznach ABS i BCS, więc płaszczyzna π jest prostopadła do obu tych płaszczyzn. Wynika stąd, że prosta HK, która jest prostopadła do płaszczyzny ABS, jest równoległa do płaszczyzny π, a wobec relacji $H \in \pi$ jest w tej płaszczyźnie zawarta. To oznacza, że punkt K leży w płaszczyźnie π. Podobnie uzasadniamy, że $L \in \pi$. Zatem proste KL i AC są zawarte w płaszczyźnie π (rys. 4).



rys. 4

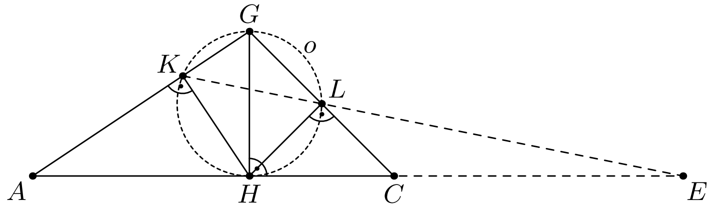
Niech G oznacza punkt wspólny płaszczyzny π i prostej SB. Wówczas

$$HK \perp AG, \quad HL \perp CG \quad \text{oraz} \quad GH \perp AC.$$

Punkty K i L leżą więc na okręgu o o średnicy GH, stycznym do prostej AC.

Zauważmy teraz, że proste KL i AC są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $KL \perp GH$. Ale punkty K i L leżą na okręgu o średnicy GH, więc warunek $KL \perp GH$ jest równoważny temu, że trójkąty GKH i GLH są symetryczne względem prostej GH. To z kolei ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle AGH = \sphericalangle CGH$, co jest równoznaczne z równoramiennością trójkąta AGC, a więc z tym, że punkt H jest środkiem odcinka AC.

Przyjmijmy zatem, że punkt H nie jest środkiem odcinka AC. Dalsza część rozumowania rozgrywa się w płaszczyźnie π (rys. 5). Dokończymy rozwiązanie zadania dwoma sposobami.



rys. 5

Sposób I

Niech E oznacza punkt przecięcia prostych KL i AC. Z twierdzenia o siecznej i stycznej zastosowanego do okręgu o uzyskujemy wówczas

$$EH^2 = EK \cdot EL. \tag{1}$$

Z drugiej strony, podobieństwo trójkątów prostokątnych GKH i GHA daje

$$\frac{GK}{GH} = \frac{GH}{GA}, \quad \text{czyli} \quad GK \cdot GA = GH^2, \tag{2}$$

zaś z podobieństwa trójkątów prostokątnych GLH i GHC dostajemy

$$\frac{GL}{GH} = \frac{GH}{GC}, \quad \text{czyli} \quad GL \cdot GC = GH^2. \tag{3}$$

Porównując stronami równości (2) i (3) stwierdzamy, że

$$GK \cdot GA = GL \cdot GC.$$

To dowodzi, że punkty A, K, L, C leżą na jednym okręgu, co implikuje, że

$$EK \cdot EL = EA \cdot EC. \tag{4}$$

Łącząc teraz zależności (1) i (4) otrzymujemy warunek

$$EH^2 = EA \cdot EC. \tag{5}$$

Punkt E na prostej AC jest określony jednoznacznie przez równość (5). Wprowadzając bowiem na prostej AC strukturę osi liczbowej i przyjmując, że punktowi X odpowiada liczba x, zapisujemy warunek (5) w postaci

$$(e-h)^2 = (e-a)(e-c), \tag{6}$$

czyli $(a+c-2h)e = ac-h^2$; skoro zaś punkt H nie jest środkiem odcinka AC, mamy $a+c-2h \neq 0$ i w efekcie istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista e spełniająca równanie (6).

Sposób II

Pozostając przy oznaczeniach rys. 5 oraz stosując twierdzenie Menelausa (zob. *L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2000, Dodatek H, str. 122) do trójkąta ACG przeciętego prostą przechodzącą przez punkty E, L, K uzyskujemy równość

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AK}{KG} \cdot \frac{GL}{LC} = \frac{AK}{KH} \cdot \frac{KH}{KG} \cdot \frac{GL}{LH} \cdot \frac{LH}{LC}. \tag{7}$$

Ponadto podobieństwo trójkątów prostokątnych AKH, HKG i AHG pozwala wnioskować, że

$$\frac{AK}{KH} = \frac{KH}{KG} = \frac{AH}{GH}, \tag{8}$$

zaś podobieństwo trójkątów prostokątnych GLH, HLC i GHC daje

$$\frac{GL}{LH} = \frac{LH}{LC} = \frac{GH}{CH}. \tag{9}$$

Łącząc zależności (7), (8) i (9) widzimy, że

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AH}{GH} \cdot \frac{AH}{GH} \cdot \frac{GH}{CH} \cdot \frac{GH}{CH} = \left(\frac{AH}{CH}\right)^2. \tag{10}$$

Podobnie jak w sposobie I równość (10) pozwala stwierdzić, że punkt E na prostej AC jest wyznaczony jednoznacznie. Odpowiednikiem równania (6) będzie w tym przypadku równanie

$$\frac{e-a}{e-c} = \left(\frac{AH}{CH}\right)^2,$$

które ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste e wobec faktu, że jego prawa strona jest różna od 1, jako że punkt H nie jest środkiem odcinka AC.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla prostej MN dochodzimy ostatecznie do następującego wniosku: Proste KL, MN i AC

- są równoległe, jeżeli punkt H jest środkiem odcinka AC;
- przecinają się w punkcie E leżącym na prostej AC i wyznaczonym przez warunek $EH^2 = EA \cdot EC$ (wynikający ze sposobu I), bądź też przez równoważny warunek

$$\frac{AE}{EC} = \left(\frac{AH}{CH}\right)^2$$

(wynikający ze sposobu II), jeżeli punkt H nie jest środkiem odcinka AC.

Zadanie **9.** Dana jest tablica 2008×2008. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy, z których każdy polega na wybraniu białego albo czarnego pionka i postawieniu go na wybranym wolnym polu. Wygrywa ten, którego ruch doprowadził do powstania ciągu 5 kolejnych pionków tego samego koloru w linii pionowej, poziomej lub ukośnej.
Zbadać, czy istnieje strategia dla gracza rozpoczynającego grę zapewniająca mu zwycięstwo.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie istnieje.

Wskażemy strategię gry dla gracza nie rozpoczynającego (zwanego w dalszej części rozwiązania *drugim* graczem), która uniemożliwi graczowi rozpoczynającemu (*pierwszemu*) zwycięstwo.

Strategię tę można opisać następująco: Jeżeli drugi gracz może wykonać ruch prowadzący do powstania ciągu 5 kolejnych pionków tego samego koloru w jednej linii, wykonuje on taki ruch i wygrywa grę. W przeciwnym razie drugi gracz stawia pionek na polu symetrycznym względem środka szachownicy do pola, które przed chwilą zajął pierwszy gracz, i w kolorze przeciwnym niż pionek postawiony właśnie przez pierwszego gracza.

Rozmiary szachownicy są liczbami parzystymi, więc pole symetryczne względem jej środka do danego pola jest *innym* polem. Opisana strategia jest zatem poprawnie określona: po każdym ruchu drugiego gracza dowolna para pól szachownicy symetrycznych względem jej środka składa się albo z dwóch wolnych, albo z dwóch zajętych pól, wobec czego po ruchu pierwszego gracza pole symetryczne do pola przezeń zajętego jest wolne.

Wykażemy, że nie jest możliwe, by przy takiej strategii drugiego gracza gracz rozpoczynający mógł odnieść zwycięstwo.

Przypuśćmy przeciwnie, że pewien ruch pierwszego gracza zapewnił mu zwycięstwo. Rozpatrzmy pozycję na szachownicy przed wykonaniem tego ruchu. Jak wykazaliśmy, w tej pozycji dowolne pole jest zajęte przez pionek wtedy i tylko wtedy, gdy pole doń symetryczne jest zajęte przez pionek przeciwnego koloru. Zatem układowi 4 pionków jednego koloru k, który pierwszy gracz przez postawienie pionka na polu P powiększył do wygrywającego układu 5 kolejnych pionków koloru k w jednej linii, odpowiada w tej pozycji układ 4 pionków koloru k' przeciwnego do k, a przy tym pole P' symetryczne do pola P jest wolne. Wówczas jednak, zgodnie z opisaną strategią, ostatni ruch drugiego gracza powinien polegać na postawieniu na polu P' pionka w kolorze k', co prowadzi do powstania ciągu 5 kolejnych pionków koloru k' w jednej linii, i w konsekwencji do wygranej drugiego gracza — wbrew założeniu, że zwycięstwo odniósł pierwszy gracz wykonując kolejny ruch.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że przy takiej strategii drugiego gracza gracz rozpoczynający nie może zapewnić sobie zwycięstwa w grze.

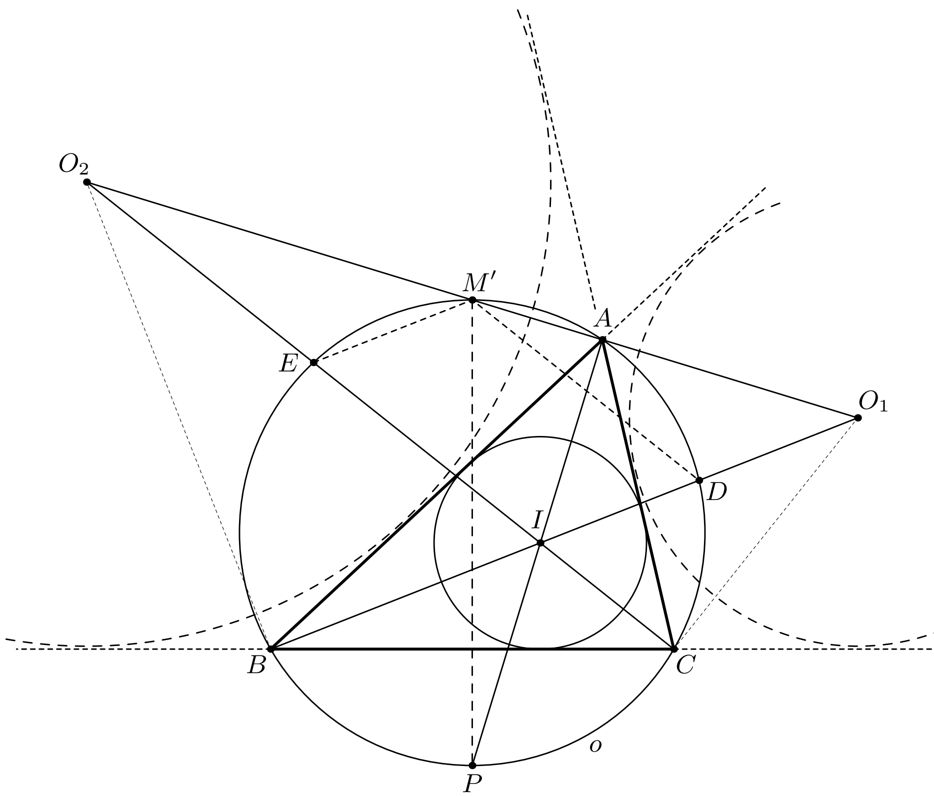
Zadanie **10.** Punkt P jest środkiem krótszego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 60°$. Punkt M jest środkiem odcinka łączącego środki dwóch okręgów dopisanych do danego trójkąta, stycznych odpowiednio do boków AB i AC. Wykazać, że $PM = 2 \cdot BP$.

(*Uwaga*: Okrąg dopisany do trójkąta to okrąg styczny do jednego z boków trójkąta oraz do przedłużeń dwóch pozostałych boków.)

Rozwiązanie

Niech O_1 i O_2 oznaczają środki okręgów dopisanych do trójkąta ABC stycznych odpowiednio do boków AC i AB, niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz niech D i E będą odpowiednio punktami, w których proste BI i CI przecinają po raz drugi okrąg o opisany na trójkącie ABC (rys. 6).

Wówczas zachodzi równość $DI = DC$ (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek E, str. 113), zaś z drugiej strony kąt $\sphericalangle ICO_1$ jest prosty, gdyż proste CI i CO_1 zawierają dwusieczne kątów odpowiednio wewnętrznego i zewnętrznego trójkąta ABC przy wierzchołku C. Wynika stąd, że punkt D jest środkiem okręgu o średnicy IO_1 opisanego na trójkącie prostokątnym ICO_1. W szczególności $ID = DO_1$. Podobnie dowodzimy, że $EI = EB$ oraz $IE = EO_2$.



rys. 6

Niech M' oznacza drugi punkt przecięcia prostej O_1O_2 z okręgiem o. (Jeżeli prosta ta jest styczna do okręgu o w punkcie A, to przyjmujemy $M' = A$.) Udowodnimy, że punkty M' i M pokrywają się.

Punkty A, I, P leżą na dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta ABC przy wierzchołku A, a punkty O_1, A, M', O_2 — na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy tym wierzchołku. Dwusieczne te są prostopadłe, zatem kąt $\sphericalangle M'AP$ jest prosty. W efekcie odcinek $M'P$ jest średnicą okręgu o. (Nietrudno spostrzec, iż stwierdzenie to zachowuje moc w przypadku, gdy $M' = A$.)

Punkt P jest środkiem krótszego łuku BC okręgu o, więc punkt M' jest środkiem dłuższego łuku BC tego okręgu. Ponadto krótsze łuki CD i DA

mają jednakowe długości (z uwagi na to, że punkt D leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle ABC$) i analogicznie krótsze łuki AE i AB mają jednakowe długości. Te cztery łuki okręgu o tworzą łącznie dłuższy łuk BC, którego środkiem jest punkt M'. Stąd wniosek, że krótsze łuki BE i $M'D$ mają równe długości oraz krótsze łuki CD i $M'E$ mają jednakowe długości. W konsekwencji $M'D = EB = EI$ oraz $M'E = DC = DI$, czyli czworokąt $EIDM'$ jest równoległobokiem. Ponieważ punkty D i E są odpowiednio środkami boków IO_1 i IO_2 trójkąta IO_1O_2, więc punkt M' jest środkiem trzeciego boku O_1O_2. Uzyskaliśmy w ten sposób równość $M' = M$.

Pozostaje zauważyć, że skoro odcinek PM jest średnicą okręgu o, to trójkąt BPM ma kąt prosty przy wierzchołku B; ponieważ zaś

$$\sphericalangle BMP = \sphericalangle BAP = \tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC = 30^\circ,$$

więc trójkąt BPM jest połową trójkąta równobocznego o boku PM i wysokości MB. Stąd bezpośrednio uzyskujemy żądaną równość $PM = 2\cdot BP$.

Zadanie **11.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $k > m \geqslant 1$ spełniona jest nierówność

$$\frac{\sqrt[k]{k!}}{\sqrt[m]{m!}} < \frac{k}{m}.$$

Rozwiązanie

Daną do udowodnienia nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{\sqrt[k]{k!}}{k} < \frac{\sqrt[m]{m!}}{m}, \qquad \text{gdzie } k > m.$$

Zatem teza zadania sprowadza się do wykazania, że ciąg (a_n) dany wzorem $a_n = \sqrt[n]{n!}/n$ jest ściśle malejący. Innymi słowy, wystarczy dowieść nierówności

$$\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \qquad \text{dla } n = 1,2,3,\ldots. \tag{1}$$

Dalsze rozumowanie przeprowadzimy dwoma sposobami.

Sposób I

Ustalmy liczbę $t = 1,2,\ldots,n$ i zastosujmy nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a średnią geometryczną do następujących n liczb:

$$\underbrace{\frac{t+1}{n+1},\ \frac{t+1}{n+1},\ \ldots,\ \frac{t+1}{n+1}}_{t\text{ liczb}},\ \underbrace{\frac{t}{n+1},\ \frac{t}{n+1},\ \ldots,\ \frac{t}{n+1}}_{n-t\text{ liczb}}. \tag{2}$$

Średnia arytmetyczna tych liczb jest równa

$$\frac{1}{n}\left(t\cdot\frac{t+1}{n+1} + (n-t)\cdot\frac{t}{n+1}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{t^2+t+nt-t^2}{n+1} = \frac{t(1+n)}{n(n+1)} = \frac{t}{n},$$

natomiast średnia geometryczna wynosi

$$\sqrt[n]{\left(\frac{t+1}{n+1}\right)^t\left(\frac{t}{n+1}\right)^{n-t}}=\frac{1}{n+1}\sqrt[n]{(t+1)^t t^{n-t}}=\frac{t}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(t+1)^t}{t^t}}.$$

Na podstawie nierówności pomiędzy średnimi uzyskujemy stąd zależności

$$\frac{t}{n}\geqslant\frac{t}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(t+1)^t}{t^t}}\qquad\text{dla } t=1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Mnożąc stronami wszystkie nierówności (3) dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}\geqslant\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{\frac{2^1}{1^1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{4^3}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}}=$$

$$=\frac{n!}{(n+1)^n}\cdot\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^n\sqrt[n]{n!}}.$$

Wyciągając teraz pierwiastek stopnia n otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\geqslant\frac{\sqrt[n]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[n^2]{n!}} \tag{4}$$

i widzimy, że aby z udowodnionej właśnie nierówności (4) wywnioskować zależność (1), wystarczy sprawdzić, że

$$\sqrt[n]{(n+1)!}>\sqrt[n+1]{(n+1)!}\cdot\sqrt[n^2]{n!}. \tag{5}$$

Podnosząc stronami zależność (5) do potęgi n^3+n^2 i wykonując przekształcenia otrzymujemy następujące jej postaci równoważne:

$$(n+1)!^{n^2+n}>(n+1)!^{n^2}\cdot(n!)^{n+1},$$

$$(n+1)!^n>(n!)^{n+1},$$

$$(n+1)^n\cdot(n!)^n>n!\cdot(n!)^n,$$

$$(n+1)^n>n!.$$

Ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż jej prawa strona jest iloczynem n liczb mniejszych od $n+1$, zaś lewa strona jest iloczynem n liczb równych $n+1$. W efekcie uzyskujemy kolejno nierówności (5) i (1), co daje tezę zadania.

Sposób II

Podnosząc stronami dowodzoną nierówność (1) do potęgi $n(n+1)$ uzyskujemy równoważną nierówność

$$\frac{(n+1)!^n}{(n!)^{n+1}}<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+1)}. \tag{6}$$

Lewa strona zależności (6) jest równa

$$\frac{(n!)^n\cdot(n+1)^n}{(n!)^n\cdot n!}=\frac{(n+1)^n}{n!},$$

a więc nierówność (6) możemy przepisać w postaci

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+1)},$$

lub równoważnie

$$n! > \frac{n^{n(n+1)}}{(n+1)^{n^2}}. \tag{7}$$

Wystarczy zatem dowieść nierówności (7) dla $n=1,2,3,\ldots$. W tym celu zastosujemy indukcję. Dla $n=1$ zależność (7) przybiera postać $1>\frac{1}{2}$ i jest prawdziwa. Aby wykonać krok indukcyjny, należy z nierówności (7) wywnioskować nierówność

$$(n+1)! > \frac{(n+1)^{(n+1)(n+2)}}{(n+2)^{(n+1)^2}}, \tag{8}$$

a do tego dostateczne będzie sprawdzenie, że dla $n=1,2,3,\ldots$ spełniona jest nierówność

$$n+1 > \frac{(n+1)^{(n+1)(n+2)}}{(n+2)^{(n+1)^2}} : \frac{n^{n(n+1)}}{(n+1)^{n^2}} = \frac{(n+1)^{2n^2+3n+2}}{(n+2)^{(n+1)^2}\cdot n^{n(n+1)}}, \tag{9}$$

gdyż wówczas mnożąc stronami zależności (7) i (9) uzyskamy nierówność (8).

Pozostaje więc wykazać prawdziwość zależności (9). W tym celu przekształcamy ją równoważnie w następujący sposób:

$$(n+2)^{(n+1)^2}\cdot n^{n(n+1)} > (n+1)^{2n^2+3n+1},$$

$$(n+2)^{(n+1)^2}\cdot n^{n(n+1)} > (n+1)^{(2n+1)(n+1)},$$

$$(n+2)^{n+1}\cdot n^n > (n+1)^{2n+1},$$

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2},$$

Stosując teraz nierówność Bernoulliego (zob. *LII Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2002, Dodatek A, str. 99) uzyskujemy

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2},$$

Aby zatem zakończyć dowód poprzedniej nierówności, wystarczy już tylko sprawdzić, że

$$\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} > \frac{n+1}{n+2},$$

lecz to sprowadza się do prawdziwej zależności

$$(n^2+n+1)(n+2) = n^3+3n^2+3n+2 > n^3+3n^2+3n+1 = (n+1)^3.$$

Stąd kolejno wynikają nierówności (9), (7), (6) i (1), co kończy rozwiązanie.

Zadanie **12.** Dana jest liczba pierwsza p. Po lewej stronie tablicy napisano liczby 1, 2, 3, ..., $p-1$, zaś po prawej stronie liczbę 0. Wykonujemy ciąg $p-1$ ruchów, z których każdy przebiega następująco: Wybieramy jedną z liczb napisanych po lewej stronie tablicy, dodajemy ją do wszystkich pozostałych liczb na tablicy, po czym wymazujemy wybraną liczbę.
Rozstrzygnąć, dla jakich wartości p można w kolejnych ruchach wybierać liczby w taki sposób, by liczba pozostała na tablicy po wykonaniu wszystkich ruchów była podzielna przez p.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Dla wszystkich liczb pierwszych p oprócz 2 i 3.

Niech t_i dla $i=1,2,\ldots,p-1$ oznacza początkową wartość tej liczby, która została wymazana z tablicy w i-tym ruchu. Zatem ciąg $(t_1,t_2,t_3\ldots,t_{p-1})$ jest permutacją ciągu $(1,2,3,\ldots,p-1)$ oraz jednoznacznie określa sposób wyboru zmazywanych liczb w kolejnych ruchach.

Wprowadźmy oznaczenie

$$s_i = t_i + 2t_{i-1} + 4t_{i-2} + \ldots + 2^{i-2}t_2 + 2^{i-1}t_1 \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,p-1.$$

Wykażemy indukcyjnie, że po wykonaniu i-tego ruchu wszystkie liczby na tablicy są większe o s_i od swych początkowych wartości.

Istotnie: stwierdzenie to jest prawdą dla $i=1$, gdyż w pierwszym ruchu wymazano liczbę t_1, zwiększając uprzednio wszystkie pozostałe liczby o $s_1=t_1$. Jeżeli natomiast po wykonaniu i-tego ruchu wszystkie liczby na tablicy były większe o s_i od początkowych wartości, to w szczególności liczba początkowo równa t_{i+1} po wykonaniu i-tego ruchu miała wartość $t_{i+1}+s_i$. Wobec tego w wyniku $(i+1)$-szego ruchu dodano do wszystkich pozostałych liczb wielkość $t_{i+1}+s_i$. Ponieważ zaś liczby te po i-tym ruchu były większe o s_i od początkowych wartości, więc po $(i+1)$-szym ruchu stały się one większe o $t_{i+1}+s_i+s_i$ od swych początkowych wartości. Pozostaje spostrzec, że

$$\begin{aligned} t_{i+1}+2s_i &= t_{i+1}+2(t_i+2t_{i-1}+4t_{i-2}+\ldots+2^{i-2}t_2+2^{i-1}t_1) = \\ &= t_{i+1}+2t_i+4t_{i-1}+8t_{i-2}+\ldots+2^{i-1}t_2+2^{i}t_1 = \\ &= s_{i+1}, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Udowodniliśmy tym samym, że po wykonaniu wszystkich p ruchów liczba pozostała po prawej stronie tablicy wynosi

$$(1) \qquad t_{p-1}+2t_{p-2}+4t_{p-3}+\ldots+2^{p-3}t_2+2^{p-2}t_1.$$

Sprowadziliśmy zatem zadanie do wyznaczenia wszystkich liczb pierwszych p, dla których istnieje taka permutacja $(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_{p-1})$ ciągu $(1,2,3,\ldots,p-1)$, że liczba (1) jest podzielna przez p.

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $p=2$ i $p=3$ nie jest możliwe otrzymanie liczby podzielnej przez p: dla $p=2$ liczba (1) wynosi 1, a dla $p=3$ może ona być równa $1+2\cdot 2=5$ albo $2+2\cdot 1=4$.

Wykażemy, że jeśli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to dla permutacji

$$(t_1,t_2,t_3,t_4,\ldots,t_{p-2},t_{p-1})=(p-2,p-1,p-4,p-3,\ldots,5,6,3,4,2,1), \tag{2}$$

powstałej z ciągu $(1,2,3,4,\ldots,p-2,p-1)$ przez zamianę miejsc w parach $(2j-1,2j)$ dla $j\geqslant 2$ i następnie odwrócenie kolejności, liczba (1) jest podzielna przez p.

Rzeczywiście, dla permutacji (2) liczba (1) ma wartość

$$L=1+2\cdot 2+2^2\cdot 4+2^3\cdot 3+2^4\cdot 6+2^5\cdot 5+\ldots+2^{p-3}(p-1)+2^{p-2}(p-2).$$

Dla $j=2,3,\ldots,\frac{1}{2}(p-1)$ prawdziwa jest zależność

$$\begin{aligned}2^{2j-2}\cdot 2j+2^{2j-1}(2j-1)&=2^{2j-2}(2j-1)+2^{2j-1}\cdot 2j+2^{2j-2}-2^{2j-1}=\\&=2^{2j-2}(2j-1)+2^{2j-1}\cdot 2j-2^{2j-2},\end{aligned}$$

z której wynika, że $L=M-N$, gdzie M jest sumą liczb postaci $2^{i-1}i$ dla $i=1,2,\ldots,p-1$, natomiast $N=2^2+2^4+2^6+\ldots+2^{p-3}$. Korzystając ze wzoru na sumę kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego obliczamy, że

$$\begin{aligned}M&=(2^0+\ldots+2^{p-2})+(2^1+\ldots+2^{p-2})+\ldots+(2^{p-3}+2^{p-2})+2^{p-2}=\\&=2^0(2^{p-1}-1)+2^1(2^{p-2}-1)+\ldots+2^{p-3}(2^2-1)+2^{p-2}(2^1-1)=\\&=(p-1)2^{p-1}-(2^0+2^1+\ldots+2^{p-3}+2^{p-2})=\\&=(p-1)2^{p-1}-(2^{p-1}-1)=\\&=p\cdot 2^{p-1}-2\cdot 2^{p-1}+1\end{aligned}$$

oraz

$$N=2^2\left(4^0+4^1+\ldots+4^{\frac{p-7}{2}}+4^{\frac{p-5}{2}}\right)=2^2\cdot\frac{4^{\frac{p-3}{2}}-1}{3}=2^2\cdot\frac{2^{p-3}-1}{3}=\frac{2^{p-1}-4}{3}.$$

W efekcie

$$L=M-N=p\cdot 2^{p-1}+\frac{-6\cdot 2^{p-1}+3-2^{p-1}+4}{3}=p\cdot 2^{p-1}-\frac{7(2^{p-1}-1)}{3}. \tag{3}$$

Na mocy małego twierdzenia Fermata (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek A, str. 102) liczba $2^{p-1}-1$ jest podzielna przez p. Skoro zaś p jest liczbą pierwszą większą od 3, ułamek występujący po prawej stronie zależności (3) jest liczbą podzielną przez p. Zatem prawa strona tej zależności jest liczbą podzielną przez p, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`