LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

13 lutego 2009 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Liczby rzeczywiste a_1, a_2, ..., a_n $(n \geqslant 2)$ spełniają warunek $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$. Udowodnić nierówność

$$a_1a_2\ldots a_{n-1}+(2a_2-a_1)(2a_3-a_2)\ldots(2a_n-a_{n-1}) \geqslant 2a_2a_3\ldots a_n.$$

2. Dane są takie liczby całkowite a i b, że $a>b>1$ oraz liczba $ab+1$ jest podzielna przez $a+b$, zaś liczba $ab-1$ jest podzielna przez $a-b$. Wykazać, że $a<b\sqrt{3}$.

3. Rozłączne okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio I_1 i I_2 są styczne do prostej k odpowiednio w punktach A_1 i A_2 oraz leżą po tej samej jej stronie. Punkt C leży na odcinku I_1I_2, przy czym $\sphericalangle A_1CA_2 = 90^\circ$. Dla $i=1,2$ niech B_i będzie punktem różnym od A_i, w którym prosta A_iC przecina okrąg o_i. Dowieść, że prosta B_1B_2 jest styczna do okręgów o_1 i o_2.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

14 lutego 2009 r. (drugi dzień zawodów)

4. Odcinek AB jest średnicą okręgu o opisanego na czworokącie wypukłym $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie E. Proste styczne do okręgu o w punktach C i D przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $PC = PE$.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 4$ o następującej własności: Spośród dowolnych n różnych 3-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego można wybrać dwa podzbiory, które mają dokładnie jeden element wspólny.

6. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ wyznaczyć wszystkie ciągi liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dla których

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i + x_{i+1})^2 = n,$$

gdzie przyjmujemy $x_0 = x_n$ i $x_{n+1} = x_1$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.