LX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

13 lutego 2009 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Liczby rzeczywiste a_1, a_2, ..., a_n $(n \geqslant 2)$ spełniają warunek $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$. Udowodnić nierówność

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} + (2a_2 - a_1)(2a_3 - a_2)\ldots(2a_n - a_{n-1}) \geqslant 2a_2 a_3 \ldots a_n.$$

Rozwiązanie

Zastosujemy indukcję matematyczną ze względu na wartość liczby n.

Dla $n = 2$ teza zadania jest prawdziwa, gdyż obie strony dowodzonej zależności są równe $2a_2$.

Przechodząc do kroku indukcyjnego rozpatrzmy liczby rzeczywiste a_1, a_2, ..., a_{n+1}, dla których $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n+1} > 0$. Należy udowodnić nierówność

$$(1) \qquad a_1 a_2 \ldots a_n + (2a_2 - a_1)(2a_3 - a_2)\ldots(2a_{n+1} - a_n) \geqslant 2a_2 a_3 \ldots a_n a_{n+1}.$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$t = a_1 - a_2, \qquad K = a_2 a_3 \ldots a_n, \qquad L = (2a_3 - a_2)\ldots(2a_{n+1} - a_n);$$

wówczas lewą stronę zależności (1) możemy zapisać w postaci

$$(2) \qquad a_1 K + (2a_2 - a_1)L = (a_2 + t)K + (a_2 - t)L = a_2(K + L) + t(K - L).$$

Stosując założenie indukcyjne do n liczb $a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$ uzyskujemy

$$(3) \qquad \begin{aligned} K + L = a_2 a_3 \ldots a_n + (2a_3 - a_2)(2a_4 - a_3)\ldots(2a_{n+1} - a_n) \geqslant \\ \geqslant 2a_3 \ldots a_n a_{n+1}. \end{aligned}$$

Ponadto dla dowolnych liczb rzeczywistych $x \geqslant y > 0$ prawdziwa jest podwójna nierówność $-x \leqslant -x + 2(x - y) = x - 2y < x$, skąd $|x - 2y| \leqslant x$ i w konsekwencji

$$|L| = |2a_3 - a_2| \cdot |2a_4 - a_3| \cdot \ldots \cdot |2a_{n+1} - a_n| \leqslant a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = K.$$

Oznacza to, że liczba $K - L$ jest nieujemna. Liczba $t = a_1 - a_2$ jest również nieujemna, zatem kontynuując zależność (2) i wykorzystując (3) dostajemy

$$a_2(K + L) + t(K - L) \geqslant a_2 \cdot 2a_3 \ldots a_n a_{n+1}.$$

Otrzymaliśmy prawą stronę nierówności (1), co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **2.** Dane są takie liczby całkowite a i b, że $a > b > 1$ oraz liczba $ab + 1$ jest podzielna przez $a + b$, zaś liczba $ab - 1$ jest podzielna przez $a - b$. Wykazać, że $a < b\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że

$$(a + b)b - (ab + 1) = b^2 - 1 \qquad \text{oraz} \qquad (ab - 1) - b(a - b) = b^2 - 1.$$

Zatem z danych w treści zadania podzielności wynika, że liczba b^2-1 jest podzielna przez $a+b$ i przez $a-b$.

Liczby a i b są względnie pierwsze. Jeżeli bowiem d jest ich wspólnym dzielnikiem dodatnim, to liczby $a+b$ i ab są podzielne przez d; z drugiej strony, liczba $ab+1$ jest podzielna przez liczbę $a+b$ podzielną przez d. Zatem liczby ab i $ab+1$ są podzielne przez d, skąd wynika, że $d=1$.

Niech e oznacza największy wspólny dzielnik liczb $a+b$ i $a-b$. Wówczas e jest dzielnikiem sumy i różnicy tych dwóch liczb, równych odpowiednio $2a$ i $2b$. Skoro liczby a i b są względnie pierwsze, otrzymujemy $e=1$ lub $e=2$. Stąd wniosek, że jeśli liczba całkowita jest podzielna przez $a+b$ i $a-b$, to dwukrotność tej liczby jest podzielna przez $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Jak zauważyliśmy wcześniej, liczba b^2-1 jest podzielna przez $a+b$ i przez $a-b$. Oznacza to, że liczba $2(b^2-1)$ jest podzielna przez a^2-b^2. Ponadto $b>1$, a więc liczba $2(b^2-1)$ jest dodatnia i wobec tego jest nie mniejsza niż a^2-b^2. Zapisując nierówność $2(b^2-1)\geqslant a^2-b^2$ w równoważnej postaci $a^2\leqslant 3b^2-2$ widzimy, że $a^2<3b^2$, co jest równoznaczne z tezą zadania.

Zadanie **3.** Rozłączne okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio I_1 i I_2 są styczne do prostej k odpowiednio w punktach A_1 i A_2 oraz leżą po tej samej jej stronie. Punkt C leży na odcinku I_1I_2, przy czym $\sphericalangle A_1CA_2=90^\circ$. Dla $i=1,2$ niech B_i będzie punktem różnym od A_i, w którym prosta A_iC przecina okrąg o_i. Dowieść, że prosta B_1B_2 jest styczna do okręgów o_1 i o_2.

Rozwiązanie

Niech prosta styczna do okręgu o_1 w punkcie B_1 przecina prostą A_1A_2 w punkcie D. (Punkt przecięcia istnieje, gdyż punkt C nie leży na prostej A_1I_1, a więc odcinek A_1B_1 nie jest średnicą okręgu o_1.) Trójkąt A_1B_1D jest wówczas równoramienny, gdyż dwa jego boki są odcinkami stycznych do okręgu o_1 poprowadzonymi z punktu D. Wobec tego prosta DI_1 jako dwusieczna kąta $\sphericalangle A_1DB_1$ jest prostopadła do cięciwy A_1B_1, a więc równoległa do prostej CA_2.

Udowodnimy, że proste A_1B_1 i DI_2 są równoległe.

Jeżeli $A_1A_2 \parallel I_1I_2$, to $A_1A_2=I_1I_2$ i czworokąt I_1CA_2D jest równoległobokiem. W takim razie $CI_2=A_1D$ i czworokąt CI_2DA_1 także jest równoległobokiem. W szczególności więc $A_1B_1 \parallel DI_2$.

Jeżeli natomiast proste A_1A_2 i I_1I_2 przecinają się w punkcie E, to stosując dwukrotnie twierdzenie Talesa do kąta $\sphericalangle A_1EI_1$ przeciętego prostymi równoległymi I_1D, CA_2 oraz I_1A_1, I_2A_2 otrzymujemy

$$\frac{EC}{EI_2}=\frac{EC}{EI_1}\cdot\frac{EI_1}{EI_2}=\frac{EA_2}{ED}\cdot\frac{EA_1}{EA_2}=\frac{EA_1}{ED},$$

co w połączeniu z twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Talesa znowu daje zależność $A_1B_1 \parallel DI_2$.

Wykazana właśnie równoległość wraz z danym w treści zadania warunkiem $\sphericalangle A_1CA_2 = 90^\circ$ pozwala wnioskować, że proste DI_2 i B_2A_2 są prostopadłe. Zauważmy teraz, że prosta DI_2 przechodzi przez środek okręgu o_2. W efekcie punkty B_2 i A_2 są symetryczne względem prostej DI_2 (gdyż są końcami cięciwy prostopadłej do tej prostej) oraz proste DB_2 i DA_2 są symetryczne względem tej prostej. Skoro zaś prosta DA_2 jest styczna do okręgu o_2, to również prosta DB_2 jest doń styczna, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

14 lutego 2009 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Odcinek AB jest średnicą okręgu o opisanego na czworokącie wypukłym $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie E. Proste styczne do okręgu o w punktach C i D przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $PC = PE$.

Rozwiązanie

Niech Q będzie punktem przecięcia prostych AD i BC.

Zauważmy najpierw, że na mocy warunków zadania proste AC i BD są wysokościami trójkąta ABQ. Zatem prosta QE jest jego trzecią wysokością i wobec tego przecina prostą AB w pewnym punkcie F pod kątem prostym.

W trójkącie ECQ kąt przy wierzchołku C jest prosty, a środek P' odcinka QE jest środkiem przeciwprostokątnej. Stąd uzyskujemy zależności $\measuredangle P'CQ = \measuredangle P'QC = \measuredangle FQB$. Ponadto trójkąty prostokątne ACB i QFB mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku B, zatem ich pozostałe kąty ostre są równe: $\measuredangle FQB = \measuredangle CAB$. Udowodniliśmy tym samym, że

$$\measuredangle P'CQ = \measuredangle CAB.$$

To oznacza, że prosta $P'C$ jest styczna do okręgu o w punkcie C.

Podobnie dowodzimy, że prosta $P'D$ jest styczna do okręgu o w punkcie D. Stąd i z określenia punktu P wynika, że $P' = P$. Innymi słowy, punkt P jest środkiem przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym ECQ, skąd natychmiast wynika żądana równość $PC = PE$.

Zadanie **5.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 4$ o następującej własności: Spośród dowolnych n różnych 3-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego można wybrać dwa podzbiory, które mają dokładnie jeden element wspólny.

Rozwiązanie

Niech A_1, A_2, ..., A_k będą różnymi 3-elementowymi podzbiorami ustalonego zbioru n-elementowego. Przypuśćmy ponadto, że dowolne dwa z tych zbiorów albo są rozłączne, albo mają dokładnie dwa wspólne elementy.

Oznaczmy $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ i wprowadźmy następujące oznaczenie:
$X \sim Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy przekrój $X \cap Y$ jest zbiorem niepustym (a więc mającym co najmniej 2 elementy),
dla (niekoniecznie różnych) zbiorów $X, Y \in \mathcal{A}$.

Dla dowolnych zbiorów $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ zachodzą następujące własności:

1) $X \sim X$;

2) jeżeli $X \sim Y$, to $Y \sim X$;

3) jeżeli $X \sim Y$ oraz $Y \sim Z$, to $X \sim Z$.

Istotnie, własności 1) i 2) są oczywiste, a by uzasadnić własność 3), wystarczy spostrzec, że z faktu, iż zbiory X, Y, Z mają 3 elementy, a przekroje $X \cap Y$ i $Y \cap Z$ mają przynajmniej 2 elementy, wynika, iż przekrój $X \cap Z$ jest zbiorem niepustym. Na mocy przyjętego na początku rozwiązania założenia przekrój ten zawiera zatem przynajmniej 2 elementy, co oznacza, że $X \sim Z$.

Własności 1)—3) dowodzą, że zbiory A_1, A_2, ..., A_k można podzielić na parami rozłączne klasy równoważności w taki sposób, by dowolne dwa zbiory X, Y należące do tej samej klasy spełniały relację $X \sim Y$, natomiast dowolne dwa zbiory należące do różnych klas tej relacji nie spełniały.

Niech $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ..., $\mathcal{B}_m$ będą tak zadanymi klasami równoważności oraz niech C_i $(i=1,2,\ldots,m)$ będzie sumą wszystkich zbiorów należących do klasy $\mathcal{B}_i$. Wówczas zbiory C_1, C_2, ..., C_m są parami rozłączne, bowiem zbiory należące do różnych klas są rozłączne. Ponadto każdy z tych zbiorów zawiera przynajmniej 3 elementy, gdyż jest sumą zbiorów 3-elementowych.

Dla każdego zbioru C_i rozpatrzmy następujące trzy możliwości:

1. Zbiór C_i ma dokładnie 3 elementy.

2. Zbiór C_i ma dokładnie 4 elementy.

3. Zbiór C_i ma przynajmniej 5 elementów.

W przypadku **1.** rodzina $\mathcal{B}_i$ składa się z jednego zbioru, mianowicie z tego zbioru A_j $(j=1,2,\ldots,k)$, który jest równy zbiorowi C_i.

W przypadku **2.** każdy zbiór należący do rodziny $\mathcal{B}_i$ jest 3-elementowym podzbiorem 4-elementowego zbioru C_i. Zatem w rodzinie tej znajdują się najwyżej 4 zbiory.

Rozpatrzmy z kolei przypadek **3.**. Wybierzmy różne zbiory $X,Y \in \mathcal{B}_i$. Są to zbiory 3-elementowe, których przekrój $X \cap Y$ ma 2-elementy, a więc suma $X \cup Y$ jest zbiorem 4-elementowym. To oznacza, że w rodzinie $\mathcal{B}_i$ istnieje zbiór Z zawierający element, który nie należy do sumy $X \cup Y$. Stąd wniosek, że 2-elementowe przekroje $X \cap Y$, $X \cap Z$, $Y \cap Z$ muszą się pokrywać, a więc można napisać

$$X = \{p,q,x\}, \quad Y = \{p,q,y\}, \quad Z = \{p,q,z\},$$

gdzie elementy p, q, x, y, z są różne. Weźmy teraz pod uwagę dowolny zbiór S należący do rodziny $\mathcal{B}_i$ i różny od zbiorów X, Y, Z. Wówczas S nie jest zbiorem $\{x,y,z\}$, gdyż ten ostatni ma dokładnie jeden element wspólny ze zbiorem X. Wobec tego przynajmniej jeden z elementów x, y, z nie należy do zbioru S. Przyjmijmy, nie zmniejszając ogólności dalszego rozumowania, iż jest to element x. Skoro przekrój $X \cap S$ jest zbiorem 2-elementowym oraz $x \notin S$, musimy mieć $X \cap S = \{p,q\}$. Ale to, wobec dowolności wyboru S, oznacza, że *każdy* zbiór należący do rodziny $\mathcal{B}_i$ zawiera elementy p i q. Stąd wniosek, że liczba elementów tej rodziny nie przekracza liczby elementów zbioru C_i pomniejszonej o 2.

Udowodniliśmy w ten sposób, że każda z rodzin $\mathcal{B}_i$ zawiera najwyżej tyle zbiorów, ile jest elementów w zbiorze C_i, przy czym równość może mieć miejsce tylko wtedy, gdy zbiór C_i ma 4 elementy.

Ponadto zbiory C_1, C_2, ..., C_m są parami rozłączne, a ich suma zawiera się w ustalonym na początku rozwiązania zbiorze n-elementowym, więc suma liczb elementów tych zbiorów nie przekracza n. Tym bardziej suma liczb elementów rodzin $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ..., $\mathcal{B}_m$ nie przekracza n, przy czym równość jest możliwa tylko w przypadku, gdy każdy ze zbiorów C_i oraz każda z rodzin $\mathcal{B}_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$ ma dokładnie 4 elementy,

Jednakże każdy ze zbiorów A_1, A_2, ..., A_k należy do dokładnie jednej z tych rodzin. Stąd wniosek, że $k \leqslant n$, przy czym równość może mieć miejsce tylko wtedy, gdy każda z rodzin $\mathcal{B}_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$ ma dokładnie 4 elementy oraz suma ilości elementów tych rodzin jest równa n. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy zachodzi równość $n=4m$. Jeśli zatem istnieje układ n trójelementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, z których żadne dwa nie mają dokładnie jednego elementu wspólnego, to liczba n jest podzielna przez 4.

Implikacja odwrotna również jest prawdziwa: jeżeli $n=4s$ dla pewnej liczby całkowitej $s \geqslant 1$, to definiujemy zbiory A_1, A_2, ..., A_{4s} warunkami

$$A_{4j-3}=\{4j-2,4j-1,4j\}, \qquad A_{4j-1}=\{4j-3,4j-2,4j\},$$
$$A_{4j-2}=\{4j-3,4j-1,4j\}, \qquad A_{4j}=\{4j-3,4j-2,4j-1\}$$

dla $j=1,2,\ldots,s$. Wówczas dowolne dwa z określonych wyżej zbiorów albo są rozłączne, albo mają dokładnie dwa wspólne elementy.

Odpowiedź: Liczba $n \geqslant 4$ spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest podzielna przez 4.

Zadanie **6.** Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ wyznaczyć wszystkie ciągi liczb rzeczywistych $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, dla których

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_{i-1}-x_i+x_{i+1})^2 = n,$$

gdzie przyjmujemy $x_0=x_n$ i $x_{n+1}=x_1$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że ciąg $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ma żądaną własność. Przyjmijmy

(1) $$y_i = x_{i-1}-x_i+x_{i+1}-1 \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,n.$$

Wówczas zachodzi równość $y_1+y_2+\ldots+y_n = x_1+x_2+\ldots+x_n-n$, a zatem z danych w treści zadania dwóch równości wynika, że

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=0 \qquad \text{oraz} \qquad (1+y_1)^2+(1+y_2)^2+\ldots+(1+y_n)^2=n,$$

skąd uzyskujemy

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n}[(1+y_i)^2-2y_i-1] = \sum_{i=1}^{n}(1+y_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} 1 = n-0-n=0.$$

Zatem $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$, co z uwagi na wzór (1) daje

$$x_{i-1} - x_i + x_{i+1} = 1 \qquad \text{dla } i = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Na odwrót, każdy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spełniający warunek (2) spełnia także równości dane w zadaniu. Pozostaje więc wyznaczyć wszystkie ciągi, dla których zachodzi warunek (2).

Oznaczmy $x_0 = a$ oraz $x_1 = b$. Wówczas stosując zależność (2) w postaci $x_{i+1} = 1 - x_{i-1} + x_i$ dla $i = 1,2,3,4,5,6$ otrzymujemy

$$x_2 = 1-a+b, \quad x_3 = 2-a, \quad x_4 = 2-b, \quad x_5 = 1+a-b, \quad x_6 = a, \quad x_7 = b.$$

Kontynuując to postępowanie stwierdzamy, że ciąg x_0, x_1, x_2, $\ldots$ jest okresowy: $x_{k+6} = x_k$ dla $k = 0,1,2,\ldots$. Ponieważ $x_0 = x_n$ oraz $x_1 = x_{n+1}$, więc para (x_0, x_1) pokrywa się z parą (x_r, x_{r+1}), gdzie r jest resztą z dzielenia liczby n przez 6.

Korzystając z wyliczonych wyżej wartości x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sprawdzamy bezpośrednio, że dla dowolnej wartości $r = 1,2,3,4,5$ jedynym rozwiązaniem układu równań $x_0 = x_r$, $x_1 = x_{r+1}$, czyli odpowiednio układów

$$\begin{cases} a=b \\ b=1-a+b \end{cases}, \quad \begin{cases} a=1-a+b \\ b=2-a \end{cases}, \quad \begin{cases} a=2-a \\ b=2-b \end{cases}, \quad \begin{cases} a=2-b \\ b=1+a-b \end{cases}, \quad \begin{cases} a=1+a-b \\ b=a \end{cases},$$

są liczby $a = b = 1$. W tej sytuacji oczywiście $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ i liczby te mają żądane w treści zadania własności.

Jeżeli natomiast $r = 0$, a więc gdy liczba n jest podzielna przez 6, to możemy wybrać dowolne wartości rzeczywiste $x_0 = x_n$ i x_1 i korzystając ze wzoru (2) wyznaczyć jednoznacznie wartości x_2, x_3, $\ldots$, x_{n+1}. Nietrudno spostrzec, że warunek (2) będzie wówczas spełniony.

Odpowiedź: Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ rozwiązaniem zadania jest ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1,1,\ldots,1)$; ponadto dla liczb n podzielnych przez 6 istnieją rozwiązania o okresie długości 6 następującej postaci:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (b, 1-a+b, 2-a, 2-b, 1+a-b, a, b, 1-a+b, \ldots, a).$$

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`