LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

22 kwietnia 2009 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Każdy z wierzchołków sześciokąta wypukłego jest środkiem koła o promieniu równym długości nie dłuższego z boków sześciokąta zawierających ten wierzchołek. Udowodnić, że jeśli część wspólna wszystkich sześciu kół (rozważanych wraz z brzegiem) jest niepusta, to sześciokąt jest foremny.

2. Niech S będzie zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, dla której istnieje 60–elementowy podzbiór zbioru S o następującej własności: *Dla dowolnych dwóch różnych elementów A, B tego podzbioru istnieje taki punkt $C \in S$, że pole trójkąta ABC jest równe k.*

3. Niech P, Q, R będą wielomianami stopnia co najmniej jeden, o współczynnikach rzeczywistych, spełniającymi dla każdej liczby rzeczywistej x równości

$$P(Q(x)) = Q(R(x)) = R(P(x)).$$

Wykazać, że $P = Q = R$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

23 kwietnia 2009 r. (drugi dzień zawodów)

4. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą liczbami nieujemnymi, których suma wynosi 1. Udowodnić, że istnieją liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ takie, że $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (2, 2, \ldots, 2)$ oraz

$$2 \leqslant a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant 2 + \tfrac{2}{3^n-1}.$$

5. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do jego ścian BCD, ACD, ABD, ABC odpowiednio w punktach P, Q, R, S. Odcinek PT jest średnicą tej sfery, zaś punkty A', Q', R', S' są punktami przecięcia prostych TA, TQ, TR, TS z płaszczyzną BCD. Wykazać, że A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.

6. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Ciąg liczb nieujemnych $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ spełnia warunek

$$c_pc_s + c_rc_t = c_{p+r}c_{r+s}$$

dla wszystkich $p, r, s, t \geqslant 0$ takich, że $p + r + s + t = n$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c_2, jeśli $c_1 = 1$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.