LX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

22 kwietnia 2009 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** *Każdy z wierzchołków sześciokąta wypukłego jest środkiem koła o promieniu równym długości nie dłuższego z boków sześciokąta zawierających ten wierzchołek. Udowodnić, że jeśli część wspólna wszystkich sześciu kół (rozważanych wraz z brzegiem) jest niepusta, to sześciokąt jest foremny.*

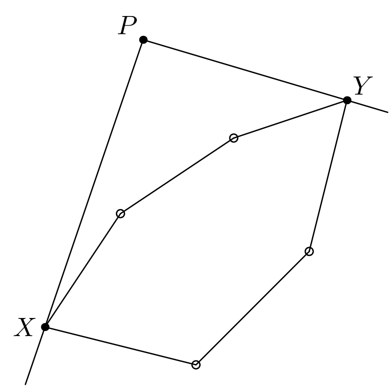
Rozwiązanie

Oznaczmy kolejne wierzchołki danego sześciokąta literami A, B, C, D, E oraz F. Załóżmy, że przecięcie sześciu kół, o których mowa w treści zadania jest niepuste i punkt P należy do tego przecięcia. Rozważmy dowolny bok sześciokąta, dla ustalenia uwagi niech to będzie bok AB. Z warunków zadania wynika, że $AP \leqslant AB$ oraz $BP \leqslant AB$, czyli jeśli P nie leży na prostej AB, to odcinek AB jest najdłuższym bokiem trójkąta ABP. Kąt APB jest zatem jego największym kątem, czyli $\sphericalangle APB \geqslant 60°$. Jeśli natomiast punkt P leży na prostej AB, to leży na odcinku AB (w przeciwnym razie $AP > AB$ lub $BP > AB$). Jeśli dodatkowo nie jest końcem tego odcinka, to $\sphericalangle APB = 180°$. Podsumowując, jeśli $P \neq A$ i $P \neq B$, to $\sphericalangle APB \geqslant 60°$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla pozostałych boków sześciokąta.

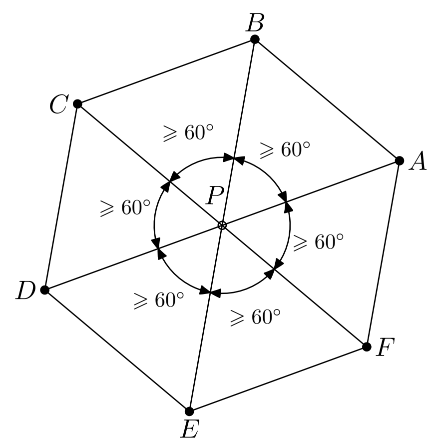
Wykażemy, że punkt P nie leży na zewnątrz sześciokąta $ABCDEF$. Gdyby tak było, to dla pewnych wierzchołków X, Y, kąt wypukły $\sphericalangle XPY < 180°$ pokryłby cały sześciokąt (**rys. 1.**). Wobec wypukłości sześciokąta $ABCDEF$ zachodziłoby

$$2\sphericalangle XPY = \sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPE + \sphericalangle EPF + \sphericalangle FPA \geqslant 6 \cdot 60° = 360°,$$

co jest sprzeczne z tym, że $\sphericalangle XPY < 180°$.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Skoro punkt P nie leży poza sześciokątem to leży w jego wnętrzu lub na jego brzegu. Najpierw rozważmy przypadek, gdy P jest jednym z wierzchołków sześciokąta. Bez zmniejszania ogólności rozumowania możemy założyć, że $P = A$. Wówczas, wobec wypukłości sześciokąta, zachodzi $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BPF = \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPE + \sphericalangle EPF \geqslant 4 \cdot 60° > 180°$, co jest niemożliwe.

Jeśli P leży na brzegu sześciokąta $ABCDEF$, ale nie jest jego wierzchołkiem, to leży pomiędzy pewnymi jego kolejnymi wierzchołkami. Bez zmniejszania ogólności rozumowania możemy założyć, że P leży na boku AB sześciokąta. Wówczas zachodzi $180° = \sphericalangle BPA = \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPE + \sphericalangle EPF + \sphericalangle FPA \geqslant 5 \cdot 60° > 180°$, co również jest niemożliwe.

Zatem P leży we wnętrzu sześciokąta. Kąty $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BPC$, $\sphericalangle CPD$, $\sphericalangle DPE$, $\sphericalangle EPF$ oraz $\sphericalangle FPA$ dają wówczas w sumie kąt pełny, a miara każdego z nich jest nie mniejsza, niż 60°. Wynika stąd, że miara każdego z nich wynosi 60° (**rys. 2.**). Ponieważ $\sphericalangle APB = 60^\circ$ jest największym kątem trójkąta ABP, pozostałe kąty również mają miarę 60°. Trójkąt ABP jest więc równoboczny i analogicznie, pozostałe trójkąty o wierzchołku P i podstawie będącej jednym z boków też są równoboczne. Zatem sześciokąt jest foremny.

Zadanie **2.** *Niech S będzie zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, dla której istnieje 60–elementowy podzbiór zbioru S o następującej własności: Dla dowolnych dwóch różnych elementów A i B tego podzbioru istnieje taki punkt $C \in S$, że pole trójkąta ABC jest równe k.*

Rozwiązanie

Niech K będzie podzbiorem zbioru S mającym dla zadanej liczby k własność podaną w treści zadania. Ustalmy dowolne dwa różne punkty $(a,b),(c,d) \in K$. Wtedy dla pewnych liczb całkowitych x,y pole trójkąta o wierzchołkach $(a,b),(c,d),(x,y)$ wynosi k, czyli zachodzi równość $\frac{1}{2}|(a-c)(y-d)-(b-d)(x-c)| = k$. Otrzymujemy stąd warunek, że równanie

$$|(a-c)(y-d)-(b-d)(x-c)| = 2k \tag{1}$$

ma dla dowolnych ustalonych i różnych $(a,b),(c,d) \in K$ rozwiązanie w liczbach całkowitych x,y.

Udowodnimy, że jeśli liczba m nie dzieli $2k$, to zbiór K ma nie więcej niż m^2 elementów. Rozważmy w tym celu pary $(a \mod m,\ b \mod m)$ reszt z dzielenia współrzędnych punktów zbioru K przez m. Jest ich m^2, więc jeśli $|K| > m^2$, to na mocy zasady szufladkowej znajdziemy dwa różne punkty $(a,b) \in K$ i $(c,d) \in K$, takie że $a \equiv c \mod m$ i $b \equiv d \mod m$. Dla takich punktów równanie (1) nie ma rozwiązania, gdyż lewa jego strona dla dowolnych x i y dzieli się przez m, a prawa nie. Zatem $|K| \leqslant m^2$ dla dowolnego m nie będącego dzielnikiem $2k$.

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli $|K| = 60$, to $2k$ musi być podzielne przez wszystkie liczby $m \leqslant 7$, bowiem $60 > 7^2$. Łatwo sprawdzić, że najmniejszą liczbą naturalną podzielną przez $2,3,4,5,6,7$ jest $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$, zatem $210|k$.

Pokażemy, że dla każdego k takiego, że $210|k$, można skonstruować 60–elementowy zbiór K mający własność podaną w treści zadania. Niech K' będzie zbiorem wszystkich tych elementów zbioru S, których obie współrzędne znajdują się w zbiorze $\{0,1,\ldots,7\}$. Ustalmy dwa dowolne, różne punkty $A=(a,b)$ i $B=(c,d)$ ze zbioru K. Wtedy $a-c, b-d \in \{-7,-6,\ldots,6,7\}$, zatem jeśli $a \neq c$, to $a-c|420$ oraz jeśli $b \neq d$, to $b-d|420$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $b \neq d$. Wówczas $b-d|2k$, gdyż $420|2k$. Punkt $C = (c + \frac{2k}{d-b}, d)$ jest zatem elementem zbioru S, zaś pole trójkąta ABC wynosi

$$\frac{1}{2}\left|(a-c)(d-d)-(b-d)\left(c+\frac{2k}{d-b}-c\right)\right| = k.$$

Ponadto $|K'| = 64 > 60$. Jako zbiór K można wziąć dowolny 60–elementowy podzbiór zbioru K'.

Tym samym pokazaliśmy, że 60–elementowy zbiór mający żądaną własność istnieje tylko dla liczb całkowitych dodatnich k będących wielokrotnościami 210. Najmniejszą taką liczbą jest 210.

Zadanie **3.** *Niech P, Q, R będą wielomianami stopnia co najmniej jeden, o współczynnikach rzeczywistych, spełniającymi dla każdej liczby rzeczywistej x równości*

$$P(Q(x)) = Q(R(x)) = R(P(x)).$$

Wykazać, że $P = Q = R$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Udowodnimy najpierw, że jeśli wielomiany W_1, W_2 spełniają dla każdej liczby rzeczywistej x równość

$$W_1(W_1(W_1(x))) = W_2(W_2(W_2(x))), \tag{1}$$

to $W_1 = W_2$.

Łatwo zauważyć, że wielomiany te mają ten sam stopień. Dla wielomianów stopnia 0 (stałych) nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że ich stopień jest równy co najmniej 1.

Zauważmy, że jeżeli równość (1) jest spełniona, to obydwa te wielomiany są zgodnie monotoniczne na przedziale (x_1, ∞) dla pewnego x_1 oraz są zgodnie monotoniczne na przedziale $(-\infty, x_1')$ dla pewnego x_1'. W przeciwnym razie $W_1(W_1(W_1(x)))$ i $W_2(W_2(W_2(x)))$ dla odpowiednio dużych x przyjmowałyby wartości o przeciwnych znakach. Zatem możliwe są następujące sytuacje:

1° W_1, W_2 są ściśle rosnące na przedziale (x_1, ∞).

2° W_1, W_2 są ściśle rosnące na przedziale $(-\infty, x_1')$.

3° Nie zachodzi ani pierwszy, ani drugi przypadek, czyli zarówno na $(-\infty, x_1')$, jak i na (x_1, ∞), oba wielomiany są malejące.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że równość (1) jest spełniona, ale $W_1 \neq W_2$. Wówczas równanie $W_1(x) - W_2(x) = 0$ ma skończenie wiele rozwiązań. W przypadku 1° istnieje zatem taka liczba x_2, że dla wszystkich liczb $x > x_2$ zachodzi $W_1(x) > W_2(x)$ (lub na odwrót, co nie ma znaczenia dla ogólności rozumowania).

Niech $x_3 = \max\{x_1, x_2\}$ i niech x_0 będzie taką liczbą rzeczywistą, że liczby x_0, $W_2(x_0)$ oraz $W_2(W_2(x_0))$ są większe od x_3. Istnienie takiej liczby x_0 wynika z tego, że W_2 jest wielomianem dodatniego stopnia, co wobec założenia dotyczącego monotoniczności wielomianu W_2 daje $\lim_{x\to+\infty} W_2(x) = \lim_{x\to+\infty} W_2(W_2(x)) = +\infty$.

Mamy więc $W_1(x_0) > W_2(x_0) > x_3$. Stąd $W_1(W_1(x_0)) > W_1(W_2(x_0)) > W_2(W_2(x_0)) > x_3$, zatem

$$W_1(W_1(W_1(x_0))) > W_1(W_1(W_2(x_0))) > W_1(W_2(W_2(x_0))) > W_2(W_2(W_2(x_0))).$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $W_1 = W_2$ w przypadku 1°.

W przypadku 2° rozumowanie przebiega podobnie. Pozostaje rozpatrzeć przypadek 3°. Zauważmy, że wtedy wielomiany $W_1'(x) = W_1(W_1(x))$ i $W_2'(x) = W_2(W_2(x))$ dążą do $+\infty$ dla $x \to +\infty$, więc są rosnące na przedziale (x_1'', ∞) dla pewnego x_1''. Możemy zatem porzeprowadzić dla W_1' i W_2' rozumowanie takie samo jak w przypadku 1° i w ten sposób wykazać, że $W_1' = W_2'$. Stąd $W_1(W_1'(x))) = W_1(W_1(W_1(x))) = W_2(W_2(W_2(x))) = W_2(W_2'(x))$, więc $W_1(W_1'(x))) = W_2(W_1'(x)))$. Wynika z tego, że $W_1 = W_2$, gdyż dla nieskończenie wielu y zachodzi $W_1(y) = W_2(y)$. To kończy dowód lematu.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Podstawiając $y = P(x)$ w równości $P(Q(y)) = Q(R(y))$ otrzymujemy $P(Q(P(x))) = Q(R(P(x)))$. Z drugiej strony, równość $P(Q(x)) = R(P(x))$ implikuje równość $Q(P(Q(x))) = Q(R(P(x)))$. Oznacza to, że $P(Q(P(x))) = Q(P(Q(x)))$, a w konsekwencji

$$P(Q(P(Q(P(Q(x)))))) = Q(P(Q(P(Q(P(x)))))).$$

Stosując wcześniej dowiedzioną obserwację dla wielomianów $W_1(x) = P(Q(x))$ i $W_2(x) = Q(P(x))$ otrzymujemy $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Stąd $Q(P(x)) = R(P(x))$, zatem $Q = R$, gdyż, ponieważ P nie jest stały, dla nieskończenie wielu y zachodzi $Q(y) = R(y)$. Pozostałych równości dowodzimy w ten sam sposób.

Sposób II.

Niech $p = \deg(P)$, $q = \deg(Q)$ oraz $r = \deg(R)$ będą stopniami wielomianów odpowiednio P, Q oraz R i niech

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p} p_k x^k, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{q} q_k x^k, \quad R(x) = \sum_{k=0}^{r} r_k x^k.$$

Niech ponadto

$$P(Q(x)) = Q(R(x)) = R(P(x)) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k,$$

przy czym $a_m \neq 0$.

Zauważmy, że $P(Q(x))$ jest wielomianem stopnia pq, czyli $m = pq$. Podobnie, rozważając wielomiany $Q(R(x))$ i $R(P(x))$ uzyskujemy $m = qr$ oraz $m = rp$. Skoro $pq = qr = rp$ oraz $p, q, r > 0$, to $p = q = r$. Dla przejrzystości oznaczmy tę wspólną wartość jako n. Wówczas $m = pq = n^2$. Analizując współczynniki $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_{m-n+1}$, wykażemy kolejno, że dla $i = n, n-1, \ldots, 1$ zachodzi $p_i = q_i = r_i$.

Zacznijmy od obserwacji, że jeśli t jest dodatnią liczbą całkowitą, to

$$(Q(x))^t = \left(\sum_{j=0}^{q} q_j x^j\right)^t = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_t \leqslant q} q_{j_1} q_{j_2} \ldots q_{j_t} x^{j_1 + j_2 + \ldots + j_t} = \sum_{k=0}^{q \cdot t} x^k \cdot \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_t \leqslant q \\ j_1 + j_2 + \ldots + j_t = k}} q_{j_1} q_{j_2} \ldots q_{j_t}.$$

Występujące w powyższym wzorze liczby $j_1, j_2, \ldots, j_t$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Zdefiniujmy wielomian $P'(x) = P(x) - p_n x^n$. Wtedy

$$P(Q(x)) = p_n (Q(x))^n + P'(Q(x)). \tag{2}$$

$P'(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $n-1$, stąd $\deg(P'(Q(x))) \leqslant n(n-1)$. Wynika z tego, że w celu wyznaczenia współczynników a_k dla $k > m - n = n(n-1)$ wystarczy skupić uwagę na współczynnikach wielomianu $p_n(Q(x))^n$, czyli

$$a_k = p_n \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_n \leqslant q \\ j_1 + j_2 + \ldots + j_n = k}} q_{j_1} q_{j_2} \ldots q_{j_n} \qquad \text{gdy } n(n-1) < k \leqslant n^2. \tag{3}$$

Mamy $a_{n^2} = p_n q_n^n = q_n r_n^n = r_n p_n^n$. Liczby p_n, q_n, r_n są różne od 0, zatem zachodzi równość

$$p_n^{n(n-1)+1} = \frac{(p_n q_n^n)(r_n p_n^n)^n}{p_n^n q_n^n r_n^n} = \frac{(q_n r_n^n)(p_n q_n^n)^n}{p_n^n q_n^n r_n^n} = q_n^{n(n-1)+1}.$$

Identycznie uzyskujemy równość $q_n^{n(n-1)+1} = r_n^{n(n-1)+1}$. Wykładnik $n(n-1)+1$ jest liczbą nieparzystą, więc $p_n = q_n = r_n$.

Niech teraz $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ i załóżmy, że $p_j = q_j = r_j$ dla $j > i$. Wtedy, korzystając z (3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{n(n-1)+i} &= \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_n \leqslant n \\ j_1 + j_2 + \ldots + j_n = n(n-1)+i}} p_n q_{j_1} q_{j_2} \ldots q_{j_n} = \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_n \leqslant n \\ j_1 + j_2 + \ldots + j_n = n(n-1)+i}} q_n r_{j_1} r_{j_2} \ldots r_{j_n} = \\ &= \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_n \leqslant n \\ j_1 + j_2 + \ldots + j_n = n(n-1)+i}} r_n p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Jedynymi sposobami przedstawienia liczby $n(n-1)+i$ w postaci sumy $j_1+j_2+\ldots+j_n$ nieujemnych liczb całkowitych, z których żadna nie przekracza n i nie wszystkie są większe niż i, są te, w których jeden składnik wynosi i, a pozostałe są równe n. Takich przedstawień jest n, gdyż i może być dowolną spośród liczb $j_1, j_2, \ldots, j_n$. Założyliśmy, że $p_j = q_j = r_j$ dla $j > i$, więc z równości (4) wynika

$$np_n q_i q_n^{n-1} = nq_n r_i r_n^{n-1} = nr_n p_i p_n^{n-1},$$

co wobec tego, że $p_n = q_n = r_n \neq 0$, pociąga za sobą równość $p_i = q_i = r_i$. To kończy dowód kroku indukcyjnego.

Pokażemy teraz, że $p_0 = q_0 = r_0$. W przypadku gdy $n > 1$, wystarczy w tym celu rozważyć współczynnik $a_{n(n-1)}$. Analizując (2), widzimy, że w wielomianie $P'(Q(x))$ współczynnikiem przy $x^{n(n-1)}$ jest $p_{n-1}q_n^n$, zatem $a_{n(n-1)}$ jest sumą $p_{n-1}q_n^n$ i współczynnika przy $x^{n(n-1)}$ w wielomianie $p_n(Q(x))^n$. Stąd

$$a_{n(n-1)} = p_{n-1}q_n^{n-1} + \sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots,j_n \leqslant n \\ j_1+j_2+\ldots+j_n=n(n-1)}} p_n q_{j_1} q_{j_2} \ldots q_{j_n}$$

i analogicznie

$$\begin{aligned} a_{n(n-1)} &= q_{n-1}r_n^{n-1} + \sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots,j_n \leqslant n \\ j_1+j_2+\ldots+j_n=n(n-1)}} q_n r_{j_1} r_{j_2} \ldots r_{j_n} \\ &= r_{n-1}p_n^{n-1} + \sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots,j_n \leqslant n \\ j_1+j_2+\ldots+j_n=n(n-1)}} r_n p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_n}. \end{aligned}$$

Wiemy, że $p_j = q_j = r_j$ dla $j > 0$, więc, podobnie jak poprzednio, dostajemy $np_n q_0 q_n^{n-1} = nq_n r_0 r_n^{n-1} = nr_n p_0 p_n^{n-1}$, skąd $p_0 = q_0 = r_0$. Pokazaliśmy zatem, że gdy $n > 1$, wielomiany P, Q oraz R mają odpowiednie współczynniki równe, więc $P = Q = R$.

Przypadek $n = 1$ wymaga oddzielnego rozważenia. Jeśli wielomiany $P(x) = p_1x + p_0$, $Q(x) = q_1x + q_0$ oraz $R(x) = r_1x + r_0$ spełniają warunki zadania, to, jak pokazaliśmy wcześniej, $p_1 = q_1 = r_1 \neq 0$. Porównując wyrazy wolne wielomianów $P(Q(x))$, $Q(R(x))$ i $R(P(x))$ dostajemy $p_1q_0 + p_0 = p_1r_0 + q_0 = p_1p_0 + r_0$, a stąd łatwo uzyskujemy, że $p_0 = q_0 = r_0$.

LX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego

23 kwietnia 2009 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** *Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą liczbami nieujemnymi, których suma wynosi 1. Udowodnić, że istnieją liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0,1,2,3,4\}$ takie, że $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (2,2,\ldots,2)$ oraz*

$$2 \leqslant a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant 2 + \tfrac{2}{3^n-1}.$$

Rozwiązanie

Rozważmy wszystkie możliwe ciągi $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ takie, że $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \{0,1,2\}$. Jest ich 3^n. Dla każdego z nich niech $S_{\mathbf{t}}$ oznacza sumę $t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n$. Ponieważ liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są nieujemne i ich suma wynosi 1, więc zachodzą nierówności

$$0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n \leqslant S_{\mathbf{t}} \leqslant 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + 2 \cdot x_n = 2.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją dwa *różne* ciągi $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ oraz $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ o wyrazach w zbiorze $\{0,1,2\}$ takie, że odpowiadające im sumy $S_{\mathbf{b}}$ oraz $S_{\mathbf{c}}$ należą do tego samego spośród 3^n-1 przedziałów $[0, \frac{2}{3^n-1})$, $[\frac{2}{3^n-1}, \frac{4}{3^n-1})$, $[\frac{4}{4^n-1}, \frac{6}{3^n-1})$, $\ldots$, $[\frac{2(3^n-5)}{3^n-1}, \frac{2(3^n-3)}{3^n-1})$, $[\frac{2(3^n-3)}{3^n-1}, 2]$. Bez zmniejszania ogólności rozumowania możemy założyć, że $S_{\mathbf{b}} \leqslant S_{\mathbf{c}}$ i wówczas

$$0 \leqslant S_{\mathbf{c}} - S_{\mathbf{b}} \leqslant \tfrac{2}{3^n-1}. \qquad (1)$$

Pokażemy, że warunki zadania spełnia ciąg $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ określony wzorem

$$a_i = 2 + c_i - b_i \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Każdy z jego wyrazów jest liczbą ze zbioru $\{0,1,2,3,4\}$. Ponadto $\mathbf{a} \neq (2,2,\ldots,2)$, gdyż ciągi $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ są różne. Zachodzi także równość

$$S_{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{n} (2 + c_i - b_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} 2x_i + \sum_{i=1}^{n} c_ix_i - \sum_{i=1}^{n} b_ix_i = 2 + S_{\mathbf{c}} - S_{\mathbf{b}},$$

skąd, wobec (1), dostajemy $2 \leqslant a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant 2 + \frac{2}{3^n-1}$.

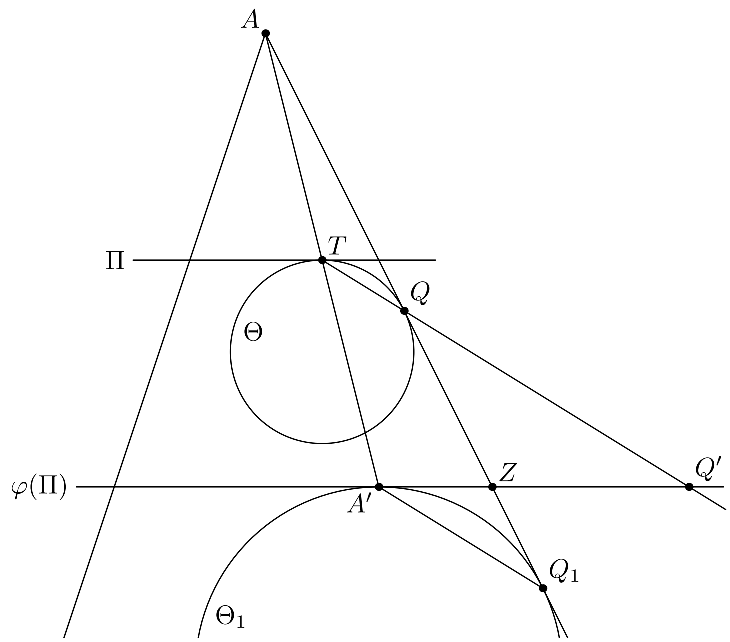
Zadanie **5.** *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do jego ścian BCD, ACD, ABD, ABC odpowiednio w punktach P, Q, R, S. Odcinek PT jest średnicą tej sfery, zaś punkty A', Q', R', S' są punktami przecięcia prostych TA, TQ, TR, TS z płaszczyzną BCD. Wykazać, że A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.*

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech Θ będzie sferą wpisaną w czworościan $ABCD$ i niech O będzie środkiem tej sfery. Ponieważ punkty A, T i A' są współliniowe oraz $A \neq T$, więc istnieje jednokładność φ o środku A przekształcająca punkt T na punkt A'. Niech $\Theta_1 = \varphi(\Theta)$ i niech Π będzie taką płaszczyzną, że jej obrazem w jednokładności φ jest płaszczyzna BCD. Wówczas płaszczyzny BCD i Π są równoległe, a ponadto $T \in \Pi$. Skoro PT jest średnicą sfery Θ i płaszczyzna BCD jest styczna do tej sfery w punkcie P, to płaszczyzna Π jest do niej styczna w punkcie T. Zatem $\varphi(\Pi)$ jest styczna do sfery $\varphi(\Theta) = \Theta_1$ w punkcie $\varphi(T) = A'$.

Rozważmy przekrój czworościanu $ABCD$, płaszczyzny Π oraz sfer Θ i Θ_1 płaszczyzną ATQ (**rys. 1.**).



Rysunek 1.

Niech Z będzie punktem przecięcia prostej AQ i płaszczyzny BCD. Niech ponadto $Q_1 = \varphi(Q)$. Wówczas Q_1 jest punktem styczności prostej AQ i sfery Θ_1, zatem $ZA' = ZQ_1$, czyli trójkąt Q_1ZA' jest trójkątem równoramiennym. Zauważmy, że proste $A'Q_1$ i TQ są równoległe, gdyż pierwsza z nich jest obrazem drugiej w jednokładności φ. Wynika stąd, że trójkąty QZQ' oraz Q_1ZA' są podobne, czyli trójkąt QZQ' również jest równoramienny. Zachodzą równości:

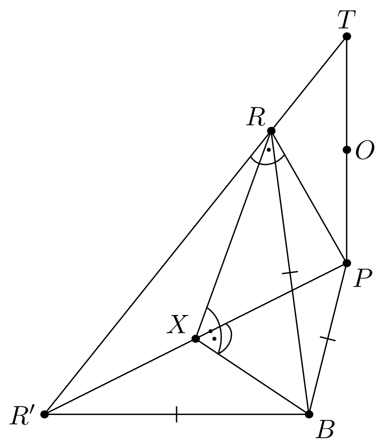
$$A'Q' = A'Z + ZQ' = Q_1Z + ZQ = Q_1Q = AQ_1 - AQ = k \cdot AQ - AQ = (k-1) \cdot AQ,$$

gdzie k jest skalą jednokładności φ. W podobny sposób pokazujemy, że $A'R' = (k-1) \cdot AR$ oraz $A'S' = (k-1) \cdot AS$. Ponieważ proste AQ, AR oraz AS są styczne do sfery Θ odpowiednio w punktach Q, R oraz S, więc $AQ = AR = AS$. Zatem $A'Q' = A'R' = A'S'$, czyli A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.

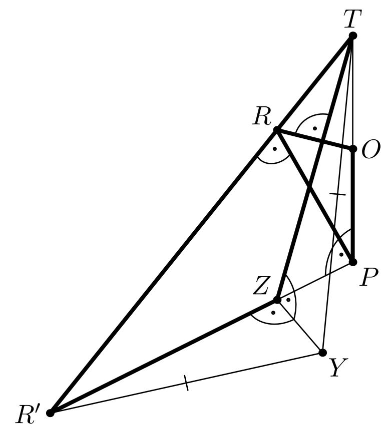
Sposób II.

Wystarczy wykazać, że proste BA', CA' i DA' są symetralnymi boków zawartego w płaszczyźnie BCD trójkąta $Q'R'S'$. Ponieważ dla wszystkich trzech prostych rozumowanie jest identyczne, ograniczymy się do pokazania, że prosta BA' jest symetralną boku $R'S'$. Dokonamy tego, wskazując na prostej BA' dwa różne punkty równoodległe od punktów R' i S'. Jednym z nich jest punkt B, a drugim rzut punktu T na płaszczyznę BCD w kierunku równoległym do prostej AB.

Niech O będzie środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$. Ponieważ proste BP i BR są styczne do tej sfery odpowiednio w punktach P oraz R, więc $BP = BR$. Wynika to z przystawania trójkątów prostokątnych BOP i BOR. Niech X będzie rzutem prostokątnym punktu B na płaszczyznę TPR (**rys. 2.**). Płaszczyzna ta jest prostopadła do płaszczyzny BCD, a ich przecięciem jest prosta PR'. Wynika stąd, że punkt X leży na prostej PR'. Trójkąty prostokątne BXP i BXR mają wspólną przyprostokątną BX i równe przeciwprostokątne. Są zatem przystające i $XP = XR$. Punkt X leży na prostej PR' zawierającej przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego PRR' i jest równoodległy od dwóch jego wierzchołków: P i R. Jest więc środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, czyli środkiem jego przeciwprostokątnej PR'. Punkt X jest także spodkiem wysokości trójkąta PBR' opuszczonej z wierzchołka B. Skoro wysokość ta połowi jego bok PR', to trójkąt ten jest równoramienny, czyli $BP = BR'$. Analogicznie pokazujemy, że $BP = BS'$. Wynika stąd, że $BR' = BS'$, co oznacza, że punkt B leży na symetralnej odcinka $R'S'$.



Rysunek 2.



Rysunek 3.

Niech Σ będzie płaszczyzną zawierającą punkt T i równoległą do płaszczyzny ABD. Płaszczyzna ABD (a więc także i płaszczyzna Σ) jest prostopadła do prostej OR, gdyż jest w punkcie R styczna do sfery, której środkiem jest punkt O. Wynika stąd, że płaszczyzny Σ i TPR są prostopadłe, gdyż ta ostatnia zawiera prostą OR. Niech Y będzie rzutem punktu T na płaszczyznę BCD w kierunku równoległym do prostej AB, czyli takim punktem płaszczyzny BCD, że $TY \| AB$. Ponieważ punkt T nie leży na prostej AB, więc $Y \neq B$. Punkt Y leży na płaszczyznach BCD oraz ABT, więc leży na będącej ich przecięciem prostej BA'. Punkt Y leży także na płaszczyźnie Σ. Niech Z będzie rzutem prostokątnym punktu Y na płaszczyznę TPR (**rys. 3.**). Ponieważ Y leży na płaszczyźnie BCD, która jest prostopadła do płaszczyzny TPR, więc Z należy do przecięcia tych płaszczyzn, czyli do prostej PR'. Z prostopadłości płaszczyzn TPR i Σ wynika z kolei, że skoro $Y \in \Sigma$, to również $Z \in \Sigma$. Trójkąt POR jest trójkątem równoramiennym, gdyż jego boki OP i OR są promieniami tej samej sfery. Proste zawierające boki trójkąta $R'ZT$ są prostopadłe do prostych zawierających boki trójkąta POR: Prosta PO jest prostopadła do płaszczyzny BCD, a więc również do zawartej w niej prostej $R'Z$. Prosta RP jest prostopadła do prostej TR', a prosta OR jest prostopadła do prostej ZT, gdyż ta ostatnia zawarta jest w płaszczyźnie Σ, a jak wcześniej zauważyliśmy, płaszczyzna Σ jest prostopadła do prostej OR. Wynika stąd, że trójkąty POR i $R'ZT$ są podobne, w szczególności trójkąt $R'ZT$ jest równoramienny i $ZT = ZR'$. Trójkąty prostokątne YZT i YZR' są przystające, bo mają wspólną przyprostokątną YZ oraz $ZT = ZR'$. Mają więc równe przeciwprostokątne, czyli $YT = YR'$. Analogicznie pokazujemy, że $YT = YS'$. Wynika stąd, że $YR' = YS'$, co oznacza, że punkt Y leży na symetralnej odcinka $R'S'$.

Wskazaliśmy dwa różne punkty leżące na prostej BA' i równoodległe od punktów R' i S'. Zatem prosta BA' jest położoną w płaszczyźnie BCD symetralną boku $R'S'$ trójkąta $Q'R'S'$. Analogiczne rozumowanie pokazuje, że symetralnymi dwóch pozostałych boków tego trójkąta są proste CA' i DA'. Punkt A' jest więc środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.

Zadanie **6.** *Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Ciąg liczb nieujemnych $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ spełnia warunek*

$$c_p c_s + c_r c_t = c_{p+r} c_{r+s} \tag{1}$$

dla wszystkich $p, r, s, t \geqslant 0$ takich, że $p+r+s+t = n$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c_2, jeśli $c_1 = 1$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Pokażemy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieje dokładnie jeden ciąg spełniający warunki zadania, a jedyna możliwa wartość c_2 wynosi $2\cos(\pi/n)$.

Zauważmy, że dla $p = n$ oraz $r = s = t = 0$ warunek (1) przyjmuje postać $c_n c_0 + c_0^2 = c_n c_0$, skąd dostajemy $c_0 = 0$. Z kolei dla dowolnego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, z warunku (1) dla $p = 0$, $r = 1$, $s = k-1$, $t = n-k$ wynika, że $c_0 c_{k-1} + c_1 c_{n-k} = c_1 c_k$, czyli $c_{n-k} = c_k$. W szczególności, dla $k = n$ dostajemy $0 = c_0 = c_n$.

Niech d będzie liczbą dodatnią, $\varphi = \frac{\pi}{n}$ oraz niech $c'_k = d\sin(k\varphi)$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Pokażemy, że tak zdefiniowany ciąg $(c'_0, c'_1, \ldots, c'_n)$ spełnia warunek (1). W tym celu wystarczy dowieść tożsamości trygonometrycznej

$$\sin\alpha \sin\gamma + \sin\beta \sin\delta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma), \tag{2}$$

dla $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi$. Przekształcając lewą stronę tożsamości, mamy

$$\begin{aligned}
2\sin\alpha\sin\gamma + 2\sin\beta\sin\delta &= \cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\beta-\delta) - \cos(\beta+\delta) \\
&= \cos(\alpha-\gamma) + \cos(\beta-\delta) \\
&= \cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+2\beta+\gamma) \\
&= 2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).
\end{aligned}$$

Korzystaliśmy tu kilkakrotnie z tożsamości $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ oraz z faktu, że $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi$. Zatem dowiedliśmy (2).

Przyjmując $d = \frac{1}{\sin\varphi}$, otrzymujemy $c'_1 = 1$ oraz $c'_k > 0$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$, a wtedy ciąg $(c'_0, c'_1, \ldots, c'_n)$ spełnia wszystkie warunki zadania. Uzasadnimy, że jest to jedyny taki ciąg.

Przypuśćmy, że $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \ldots, d_n)$ jest ciągiem liczb nieujemnych spełniającym warunki nałożone na ciąg $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$, ale $\mathbf{d} \neq \mathbf{c}$. Podstawiając w (1) $p = s = 1$ oraz $t = n-r-2$ i korzystając z wcześniej udowodnionej zależności $c_{n-k} = c_k$, otrzymujemy $c_{r+1}^2 = 1 + c_r c_{n-r-2} = 1 + c_r c_{r+2}$. Z tego wynika, że $c_{r+1} \geqslant 1$ oraz

$$\frac{c_{r+2}/c_{r+1}}{c_{r+1}/c_r} = 1 - \frac{1}{c_{r+1}^2} \quad \text{dla } 1 \leqslant r \leqslant n-2. \tag{3}$$

Ponadto, jeżeli znamy c_2, to pozostałe wyrazy c_r, dla $r = 3, \ldots, n$, są wyznaczone jednoznacznie. Skoro $\mathbf{d} \neq \mathbf{c}$, możemy zatem założyć, że $d_2 > c_2$ (przypadek $d_2 < c_2$ jest analogiczny). Uzasadnimy indukcyjnie, że wtedy $\frac{d_{r+1}}{d_r} > \frac{c_{r+1}}{c_r}$ oraz $d_{r+1} > c_{r+1}$ dla $0 < r < n$.

Dla $r = 1$ obie nierówności są spełnione, bo $d_1 = c_1 = 1$. Załóżmy, że nierówności te spełnione są dla pewnego $r \geqslant 1$. Wtedy z zależności (3), analogicznej zależności dla ciągu $\mathbf{d}$ oraz korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$\frac{d_{r+2}/d_{r+1}}{d_{r+1}/d_r} = 1 - \frac{1}{d_{r+1}^2} > 1 - \frac{1}{c_{r+1}^2} = \frac{c_{r+2}/c_{r+1}}{c_{r+1}/c_r}.$$

Stąd i z faktu, że wyrazy ciągu $\mathbf{d}$ (poza skrajnymi) są dodatnie, mamy

$$\frac{d_{r+2}}{d_{r+1}} = \frac{d_{r+2}/d_{r+1}}{d_{r+1}/d_r} \cdot \frac{d_{r+1}}{d_r} > \frac{c_{r+2}/c_{r+1}}{c_{r+1}/c_r} \cdot \frac{c_{r+1}}{c_r} > \frac{c_{r+2}}{c_{r+1}}$$

oraz $d_{r+2} = \frac{d_{r+2}}{d_{r+1}} \cdot d_{r+1} > \frac{c_{r+2}}{c_{r+1}} \cdot c_{r+1} = c_{r+2}$, co kończy dowód kroku indukcyjnego.

Uzyskaliśmy $d_{r+1} > c_{r+1}$ dla $0 < r < n$, ale to prowadzi do sprzeczności, bo $d_n = 0 = c_n$. Zatem istnieje najwyżej jeden ciąg spełniający warunki zadania.

Wobec powyższych rozważań, jedyną możliwą wartością c_2 jest $\frac{\sin(2\pi/n)}{\sin(\pi/n)} = 2\cos(\pi/n)$.

Sposób II.

Stosując warunek (1) dla $p = n$ oraz $r = s = t = 0$ otrzymujemy $c_n c_0 + c_0^2 = c_n c_0$, czyli $c_0 = 0$. Następnie w (1) podstawiamy $t = 0$ oraz $p = s = l \leqslant n/2$, $r = n - 2l$. Otrzymujemy $c_l^2 = c_{n-l}^2$, czyli $c_l = c_{n-l}$, gdyż $c_l, c_{n-l} \geqslant 0$. Z kolei dla $p = 1$, $r = k - 2$, $s = 1$, $t = n - k$ uzyskujemy tożsamość

$$1 + c_k c_{k-2} = c_{k-1}^2 \qquad \text{dla } k = 2, 3, \ldots, n. \tag{4}$$

Zatem $c_i \geqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Gdyby zachodziła nierówność $c_2 \geqslant 2$, wówczas prosty argument indukcyjny, oparty na wynikającej z (4) równości $c_k = \frac{c_{k-1}-1}{c_{k-2}}(c_{k-1}+1)$, pokazałby, że $c_k \geqslant c_{k-1}+1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, czyli ciąg (c_k) byłby rosnący, co przeczy temu, że $c_0 = c_n$. Zatem $c_2 < 2$. Z warunku (4) płynie jeszcze jeden wniosek: Skoro $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ oraz $c_i \geqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$, zatem jeżeli ustalimy liczbę c_2, to warunek (4) jednoznacznie wyznacza pozostałe wyrazy ciągu.

Narysujmy na płaszczyźnie trójkąt $A_0A_1A_2$ o bokach $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 1$ oraz $A_0A_2 = c_2$. Taki trójkąt istnieje, gdyż $|1 - 1| = 0 < c_2 < 2 = 1 + 1$. Opiszmy na nim okrąg o o środku O i rozważmy punkty $A_3, A_4, \ldots, A_n$ leżące na okręgu o takie, że kąty skierowane $\sphericalangle A_iOA_{i+1}$ są równe. Wykażemy indukcyjnie, że $c_k = A_0A_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Dla $k = 0, 1, 2$ teza zachodzi. Załóżmy, że zachodzi ona dla każdego $l \leqslant k$. Jeżeli czworokąt $A_0A_1A_{k-1}A_k$ jest wypukły, to stosując twierdzenie Ptolemeusza dostajemy $A_0A_1 \cdot A_{k-1}A_k + A_0A_k \cdot A_1A_{k-1} = A_0A_{k-1} \cdot A_1A_k$, czyli $1 + A_0A_k \cdot c_{k-2} = c_{k-1}^2$. Równość ta zachodzi również wtedy, gdy czworokąt $A_0A_1A_{k-1}A_k$ jest zdegenerowany i $A_k = A_0$. Zatem gdy czworokąty $A_0A_1A_2A_3$, $A_0A_1A_3A_4$, $\ldots$, $A_0A_1A_{k-1}A_k$ są wypukłe (lub zdegenerowane) to $c_k = A_0A_k$.

Rozważmy dwa przypadki ze względu na miarę kąta A_0OA_1.

1. Jeśli $\sphericalangle A_0OA_1 \leqslant 2\pi/n$, to czworokąt $A_0A_1A_{k-1}A_k$ jest wypukły dla każdego $k \in \{3, 4, \ldots, n\}$ (lub $A_k = A_0$, gdy $k = n$ oraz $\sphericalangle A_0OA_1 = 2\pi/n$) i wtedy $c_k = A_0A_k$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Jednocześnie $0 = c_0 = c_n = A_0A_n$, czyli $A_0 = A_n$, co oznacza, że $\sphericalangle A_0OA_1 = 2\pi/n$, a zatem c_2 jest długością najkrótszej przekątnej w n–kącie foremnym.

2. Jeśli $\sphericalangle A_0OA_1 > 2\pi/n$, to dla pewnego $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ punkt A_0 znajduje się wewnątrz kąta A_mOA_{m+1} lub $A_0 = A_m$. W obydwu tych wypadkach $A_0A_m < 1$. Wybierzmy najmniejsze takie m. Wówczas dla $k \leqslant m$ odpowiednie czworokąty $A_0A_1A_{k-1}A_k$ są wypukłe, zatem $A_0A_m = c_m \geqslant 1$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że ten przypadek nie zachodzi.

Podsumowując, dla ustalonego n, jeżeli istnieje ciąg spełniający warunki zadania, to jest tylko jeden i wyraża się wzorem $c_k = A_0A_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$, gdzie $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ są wierzchołkami n–kąta foremnego o boku 1. Pozostaje sprawdzić, że tak zdefiniowany ciąg spełnia zależność (1).

Jeżeli liczby całkowite p, r, s, t są dodatnie i $p + r + s + t = n$, to z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $A_0A_pA_{p+r}A_{p+r+s}$, który jest wpisany w okrąg opisany na rozważanym n–kącie, otrzymujemy

$$A_0A_p \cdot A_{p+r}A_{p+r+s} + A_pA_{p+r} \cdot A_0A_{p+r+s} = A_0A_{p+r} \cdot A_pA_{p+r+s},$$

a stąd, ponieważ n–kąt jest foremny,

$$A_0A_p \cdot A_0A_s + A_0A_r \cdot A_0A_t = A_0A_{p+r} \cdot A_0A_{r+s}, \tag{5}$$

czyli warunek (1) jest spełniony dla dodatnich p, r, s, t. Łatwo sprawdzić, że zależność (5) jest prawdziwa również w przypadku, gdy przynajmniej jedna z liczb p, r, s, t jest równa 0. Ponadto każdy wyraz $c_k = A_0A_k$ jest nieujemny, zatem rozważany ciąg spełnia założenia zadania.

Z powyższych rozważań wynika, że c_2 jest długością najkrótszej przekątnej w n–kącie foremnym o boku 1, czyli $c_2 = 2\cos(\pi/n)$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje
można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`