LXI Olimpiada Matematyczna

Rozpoczyna się 61 Olimpiada Matematyczna. Zachęcamy uczniów szkół średnich do wzięcia udziału w niej.

Zawody są trójstopniowe. Uczestnikiem Olimpiady staje się każdy uczeń, który przyśle rozwiązanie co najmniej jednego zadania. Do zakwalifikowania się do zawodów drugiego stopnia nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań pierwszego stopnia. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie, choć można zadawać pytania innym osobom, również nauczycielom, w celu wyjaśnienia wątpliwości. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności komitet okręgowy podejmie odpowiednie kroki aż do dyskwalifikacji włącznie. Rozwiązania zadań należy przesłać listem poleconym do komitetu okręgowego właściwego dla adresu szkoły. Uczestnicy uczący się za granicą przesyłają swe prace do komitetu okręgowego w Warszawie. Zachęcamy do zapoznania się z regulaminem, w którym są pełniejsze informacje o Olimpiadzie. Regulamin i inne informacje o Olimpiadzie, również zadania, można znaleźć na stronie internetowej: **http://www.om.edu.pl**. Tam znajdują się aktualne adresy komitetów okręgowych Olimpiady.

Zawody I stopnia: **1.09–30.09.09,** **1.10–31.10.09,** **1.11–30.11.09.**
Zawody II stopnia: **19 i 20 lutego 2010 r**
Zawody III stopnia: **21 i 22 kwietnia 2010 r**.

Uczestnicy finału dostaną maksymalną ocenę z matury z matematyki (szczegóły w komunikatach dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej dostępnych na stronie internetowej: **http://www.cke.edu.pl**) i prawo wstępu na wiele wyższych uczelni zgodnie z decyzjami ich senatów.

Najlepsi uczestnicy będą reprezentować Polskę na LI Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej, IV Środkowoeuropejskiej Olimpiadzie Matematycznej i XXI Zawodach Państw Bałtyckich.

Wielu Waszych starszych kolegów, którzy uczestniczyli w zawodach w latach poprzednich, osiąga dziś dzięki Olimpiadzie pomyślne wyniki w studiach wyższych lub w pracy naukowej. Wielu uzyskało tytuł naukowy profesora.

LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września - 30 września 2009r.)

1. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb rzeczywistych dodatnich, spełniających równanie

$$(x^{2010} - 1)(y^{2009} - 1) = (x^{2009} - 1)(y^{2010} - 1).$$

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Na odcinku AC wybrano punkt D, który nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD. Wykazać, że punkty B, C, D, S leżą na jednym okręgu.

3. Dwa ciągi skończone będziemy nazywać zgodnymi, jeżeli jeden z nich powstał przez usunięcie z drugiego dwóch identycznych, sąsiadujących ze sobą segmentów. Na przykład zgodne są ciągi $(1, 2, 3, 2, 3, 4)$ i $(1, 4)$, jak również (1) i $(1, 1, 1, 1, 1)$, natomiast nie są zgodne ciągi $(2, 2, 2, 2, 2)$ i $(2, 2)$, ani $(1, 4)$ i $(1, 2, 3, 3, 2, 4)$. Operacją segmentowania nazwiemy zastąpienie ciągu przez ciąg z nim zgodny. Dowieść, że z każdego skończonego ciągu liczbowego można otrzymać, za pomocą pewnej liczby operacji segmentowania, ciąg niemalejący.

4. Liczba 2 należy do zbioru A, który spełnia następujący warunek: Dla każdej liczby rzeczywistej $x \in A$, jeżeli $x \neq 0$ i $x \neq 1$, to

$$\frac{x+1}{x} \in A \quad \text{oraz} \quad \frac{2x-1}{x-1} \in A.$$

Dowieść, że A zawiera wszystkie liczby wymierne większe od 1.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać **listem poleconym** *na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia*

30 września 2009r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

II seria (1 października - 31 października 2009r.)

5. Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej l leży środek sfery wpisanej oraz środek sfery opisanej na czworościanie. Udowodnić, że jeśli prosta l przecina odcinek AB, to $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

6. Dana jest liczba pierwsza $p \neq 5$ oraz takie liczby całkowite a, b, c, że p jest dzielnikiem obu liczb $a+b+c$ i $a^5+b^5+c^5$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$ jest podzielna przez p.

7. Trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB > 90°$, wpisany jest w okrąg o środku S. Prosta CS przecina odcinek AB w punkcie D. Udowodnić, że jeżeli

$$AC + BC = 2CS\,,$$

to okręgi wpisane w trójkąty ADC i BDC mają równe promienie.

8. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c i liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geqslant \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b}\right) \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}\,.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać **listem poleconym** *na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia*

31 października 2009r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

III seria (1 listopada - 30 listopada 2009r.)

9. Niech $\mathbb{N}_0$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Funkcje $f, g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ spełniają dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ warunek

$$g(f(n)) = g(n) - n\,.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości $f(0)$.

10. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieją parami różne liczby całkowite dodatnie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\,,$$

spełniające warunki:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \quad \text{oraz} \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n\,.$$

11. Czworokąty wypukłe $ABCD$ i $PQRS$ mają jednakowe pola. Ponadto spełnione są równości:

$$AB = PQ, \quad BC = QR, \quad CD = RS, \quad DA = SP.$$

Dowieść, że istnieją takie punkty P', Q', R', S' leżące na tej samej płaszczyźnie co czworokąt $ABCD$, że

$$AP' = BQ' = CR' = DS'$$

i czworokąty $P'Q'R'S'$ i $PQRS$ są przystające.

12. Gracze K i F grają w c–*fasolki*, gdzie c jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Gracz K posiada na początku $n \geqslant 2$ pustych kubków. W każdej rundzie wskazuje dowolne dwa rozłączne, niepuste zbiory kubków. Następnie F wybiera jeden ze zbiorów wskazanych przez K i dokłada po jednej fasolce do każdego z kubków w tym zbiorze. Gra kończy się w momencie wybranym przez K, przy czym liczba rund nie może przekroczyć cn. K wygrywa, gdy po zakończeniu gry w każdym kubku znajduje się inna liczba fasolek, w przeciwnym razie wygrywa F. Wyznaczyć wszystkie liczby c o następującej własności: dla każdego $n \geqslant 2$ gracz K ma strategię zapewniającą mu zwycięstwo w c–fasolki.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać **listem poleconym** *na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia*

30 listopada 2009r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane po tym terminie nie będą oceniane.