LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września – 30 września 2009r.)

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych dodatnich, spełniających równanie

$$(x^{2010}-1)(y^{2009}-1)=(x^{2009}-1)(y^{2010}-1). \qquad (1)$$

Rozwiązanie

Sposób I.

Równanie (1) jest spełnione, gdy $x=1$ lub $y=1$. Dalej będziemy zakładać, że $x,y\neq 1$. W takim razie możemy podzielić obie strony równania przez $(x-1)(y-1)\neq 0$. Otrzymujemy wtedy równanie

$$(x^{2009}+\ldots+x+1)(y^{2008}+\ldots+y+1)=(x^{2008}+\ldots+x+1)(y^{2009}+\ldots+y+1),$$

które jest równoważne następującemu:

$$x^{2009}(y^{2008}+\ldots+y+1)=y^{2009}(x^{2008}+\ldots+x+1).$$

Z założenia zadania $x,y>0$, możemy zatem podzielić obie strony powyższego równania przez $x^{2009}y^{2009}$. Otrzymamy wtedy

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\ldots+\frac{1}{y^{2009}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}. \qquad (2)$$

Udowodnimy, że jeżeli para (x,y) spełnia równanie (2), to $x=y$. Istotnie, jeżeli $x>y>0$ to dla każdego n dodatniego $\frac{1}{x^n}<\frac{1}{y^n}$ i w konsekwencji

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\ldots+\frac{1}{y^{2009}}>\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}.$$

Ta sprzeczność dowodzi, że nie może być $x>y$. W pełni analogicznie dowodzimy, że nierówność $0<x<y$ także nie może zajść. Stąd $x=y$.

Łatwo sprawdzimy, że jeśli $x=y$, to równanie (1) jest spełnione. Rozwiązaniami są zatem wszystkie pary (x,y) postaci $(1,a)$, $(a,1)$ lub (a,a), dla pewnej liczby rzeczywistej dodatniej a.

Sposób II.

Podobnie jak w sposobie I, zakładamy, że $x,y\neq 1$. Rozważmy funkcję f, określoną na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$ następującym wzorem:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2010}{2009} & \text{dla } t=1,\\[2ex] \frac{t^{2010}-1}{t^{2009}-1} & \text{dla } t\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}.\end{cases}$$

Równanie (1) przyjmuje wtedy postać

$$f(x)=f(y). \tag{3}$$

Wykażemy, że funkcja f jest różnowartościowa, co da wniosek, że jedynymi rozwiązaniami równania (3) są pary (x,y), w których $x=y$.

Zauważmy, że

$$\lim_{t\to 1} f(t)=\lim_{t\to 1}\frac{t^{2010}-1}{t^{2009}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^{2009}+\ldots+t+1}{t^{2008}+\ldots+t+1}=\frac{2010}{2009}=f(1),$$

zatem funkcja f jest ciągła. Aby dowieść różnowartościowości tej funkcji, wystarczy wykazać, że jej pochodna ma stały znak na zbiorze $\mathbb{R}_+\backslash\{1\}$. Istotnie,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\frac{t^{2010}-1}{t^{2009}-1}\right)'=\frac{(t^{2010}-1)'(t^{2009}-1)-(t^{2010}-1)(t^{2009}-1)'}{(t^{2009}-1)^2}= \\ &= \frac{2010t^{2009}(t^{2009}-1)-(t^{2010}-1)2009t^{2008}}{(t^{2009}-1)^2}= \\ &= \frac{t^{2008}(t^{2010}-2010(t-1)-1)}{(t^{2009}-1)^2}. \end{aligned}$$

Podstawiając $c=t-1$ oraz $n=2010$ do nierówności Bernoulliego

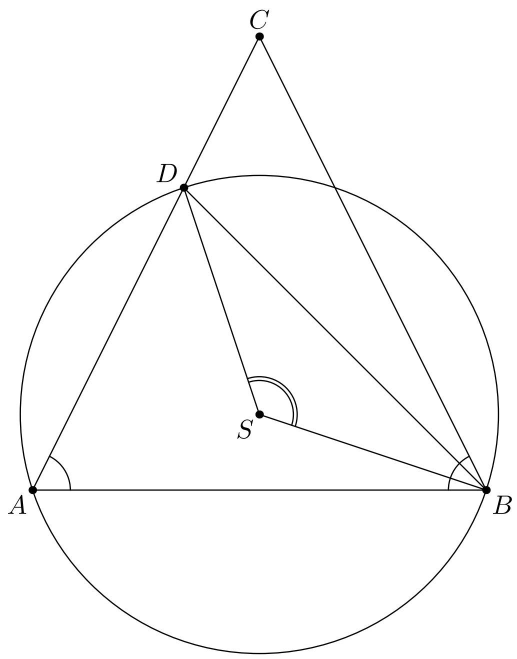
$$(1+c)^n>1+nc,$$

prawdziwej dla $c>-1, c\neq 0$ oraz $n>1$, otrzymujemy $t^{2010}>1+2010(t-1)$, zatem $f'(t)>0$ dla $t>0$, $t\neq 1$. Jedynymi parami spełniającymi równanie (3) są więc pary postaci (a,a) dla $a>0$, co daje znów odpowiedź $(1,a)$, $(a,1)$ lub (a,a), dla dowolnego a rzeczywistego dodatniego.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Na odcinku AC wybrano punkt D, który nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD. Wykazać, że punkty B,C,D,S leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

Kąt wpisany BAD oraz kąt środkowy BSD są oparte na łuku BD okręgu opisanego na trójkącie ABD. Ponadto kąt BAD jest ostry, więc punkty A i S leżą po tej samej stronie prostej BD. Stąd $\sphericalangle BSD=2\sphericalangle BAD$.



Widzimy zatem, że

$$\sphericalangle BCD + \sphericalangle BSD = \sphericalangle BCA + 2\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC = 180^\circ.$$

Skoro punkty A i S leżą po tej samej stronie prostej BD, punkt C leży po innej jej stronie, niż punkt S. To dowodzi, że na czworokącie $BCDS$ można opisać okrąg, czyli punkty B, C, D, S leżą na jednym okręgu. $\square$

Zadanie 3. Dwa ciągi skończone będziemy nazywać zgodnymi, jeżeli jeden z nich powstał przez usunięcie z drugiego dwóch identycznych, sąsiadujących ze sobą segmentów. Na przykład zgodne są ciągi $(1, 2, 3, 2, 3, 4)$ i $(1, 4)$, jak również (1) i $(1, 1, 1, 1, 1)$, natomiast nie są zgodne ciągi $(2, 2, 2, 2, 2)$ i $(2, 2)$, ani $(1, 4)$ i $(1, 2, 3, 3, 2, 4)$. Operacją segmentowania nazwiemy zastąpienie ciągu przez ciąg z nim zgodny. Dowieść, że z każdego skończonego ciągu liczbowego można otrzymać, za pomocą pewnej liczby operacji segmentowania, ciąg niemalejący.

Rozwiązanie

Będziemy w skrócie zapisywać $(\mathbf{a}) \sim (\mathbf{b})$, jeżeli ciągi $(\mathbf{a})$ i $(\mathbf{b})$ są zgodne. Jeżeli natomiast z jednego z nich można otrzymać drugi za pomocą pewnej liczby operacji segmentowania, będziemy pisać $(\mathbf{a}) \leftrightarrow (\mathbf{b})$. Zauważmy, że

$$(\ldots, x, y, \ldots) \sim (\ldots, x, y, y, x, y, x, \ldots) \sim (\ldots, x, x, y, x, \ldots) \sim (\ldots, y, x, \ldots),$$

Zatem $(\ldots, x, y, \ldots) \leftrightarrow (\ldots, y, x, \ldots)$. Innymi słowy, za pomocą trzech operacji segmentowania możemy zamienić miejscami dowolne dwa sąsiednie elementy ciągu.

Dalsze rozumowanie przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na liczbę elementów ciągu. Każdy ciąg jednoelementowy jest niemalejący, więc spełnia warunki zadania. Załóżmy, że każdy ciąg n-elementowy można przeprowadzić zgodnie z regułami w ciąg niemalejący.

Rozważmy dowolny ciąg $(n+1)$-elementowy $(x_1, x_2, \ldots, x_k, M, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$, gdzie M jest największą liczbą w tym ciągu (lub jedną z największych, jeśli takich jest więcej). Na mocy wcześniej dowiedzionego faktu, zachodzą relacje:

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_k, M, x_{k+1}, \ldots, x_n) &\leftrightarrow (x_1 \ldots, x_k, x_{k+1}, M, x_{k+2}, \ldots, x_n) \\
&\leftrightarrow (x_1 \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, M, x_{k+3} \ldots, x_n) \\
&\leftrightarrow \ldots \\
&\leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n, M)
\end{aligned}$$

(gdy segment $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ jest pusty, rozumowanie jest nadal poprawne). Na mocy założenia indukcyjnego, ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ można przeprowadzić w ciąg niemalejący, zatem jest to również możliwe dla ciągu $(x_1, x_2, \ldots, x_n, M)$, gdyż obecność ostatniego elementu nie ma wpływu na przebieg operacji na ciągu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. To kończy krok indukcyjny. $\square$

Zadanie 4. Zbiór A spełnia następujący warunek: Dla każdej liczby rzeczywistej $x \in A$, jeżeli $x \neq 0$ i $x \neq 1$, to
$$\frac{x+1}{x} \in A \quad \text{oraz} \quad \frac{2x-1}{x-1} \in A.$$
Udowodnić, że jeżeli $2 \in A$, to A zawiera wszystkie liczby wymierne większe od 1.

Rozwiązanie

Sposób I.

Załóżmy, że teza zadania nie jest spełniona. Przedstawmy wszystkie liczby wymierne większe od 1 i nie należące do A w postaci ułamków. Wybierzmy spośród nich taki, który ma najmniejszy licznik. Niech będzie to $\frac{p}{q}$. Jest jasne, że $\frac{p}{q} \neq 2$, gdyż z warunków zadania $2 \in A$. W takim razie $p - 2q \neq 0$.

Zauważmy, że
$$\frac{\frac{q}{p-q}+1}{\frac{q}{p-q}} = \frac{p}{q} \quad \text{oraz} \quad \frac{2 \cdot \frac{p-q}{p-2q} - 1}{\frac{p-q}{p-2q} - 1} = \frac{p}{q}.$$
Zatem jeśli $\frac{p}{q} \notin A$, to do zbioru A nie może należeć żadna z liczb $\frac{q}{p-q}$, $\frac{p-q}{p-2q}$ (nietrudno sprawdzić, że obie są różne od 0 i 1). Odnotujmy następujące dwa fakty:

- Jeśli $1 < \frac{p}{q} < 2$, to $\frac{q}{p-q} > 1$ oraz $0 < q < p$.
- Jeśli $\frac{p}{q} > 2$, to $\frac{p-q}{p-2q} > 1$ oraz $0 < p - q < p$.

Wnioskujemy stąd, że jeżeli $\frac{p}{q} > 1$ oraz $\frac{p}{q} \notin A$, to istnieje ułamek o wartości większej niż 1, liczniku mniejszym niż p, którego wartość nie jest elementem zbioru A. Jest to jednak sprzeczne z wcześniejszym założeniem, że p jest najmniejszym możliwym licznikiem takiego ułamka. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. □

Sposób II.

Jeśli $x \in A$, $x > 1$ to $\frac{x+1}{x} \in A$, $\frac{x+1}{x} > 1$ oraz
$$x + 2 = \frac{2 \cdot \frac{x+1}{x} - 1}{\frac{x+1}{x} - 1} \in A.$$
Zatem, na mocy indukcji, dla dowolnego $x > 0$ prawdziwa jest implikacja:
$$x+1, x+2 \in A \Rightarrow x + t \in A \quad \text{dla wszystkich } t = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Za pomocą indukcji względem n udowodnimy, że dla dowolnego n całkowitego dodatniego prawdziwe jest następujące zdanie:
$$\frac{k}{n} \in A \quad \text{dla każdego całkowitego } k > n. \tag{2}$$

Zauważmy, że $3 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} \in A$. Ponieważ także $2 \in A$, na podstawie (1) wnioskujemy, że zdanie (2) jest prawdziwe dla $n = 1$.

Załóżmy indukcyjnie, że (2) zachodzi dla wszystkich $n < n_0$. Udowodnimy, że jest ono prawdziwe również dla n_0.

Przy naszym założeniu indukcyjnym $\frac{n_0}{n}, \frac{n_0+n}{n} \in A$ dla $n < n_0$ (wstawiamy $k = n_0 > n$, lub odpowiednio $k = n_0 + n > n$). Wtedy do zbioru A należą również liczby

$$\frac{\frac{n_0}{n}+1}{\frac{n_0}{n}} = \frac{n}{n_0}+1 \quad \text{oraz} \quad \frac{2\cdot\frac{n_0+n}{n}-1}{\frac{n_0+n}{n}-1} = \frac{n}{n_0}+2.$$

Zatem, na mocy (1), dla dowolnego t całkowitego dodatniego (i dla wszystkich $n < n_0$)

$$\frac{n}{n_0}+t = \frac{tn_0+n}{n_0} \in A.$$

Każda liczba $k > n_0$ niepodzielna przez n_0 może być zapisana w postaci tn_0+n, gdzie $t \geqslant 1$, $0 < n < n_0$ są liczbami całkowitymi. Jeśli zaś liczba k jest podzielna przez n_0, to $\frac{k}{n_0}$ jest liczbą całkowitą dodatnią, o której już wiemy, że należy do A. Udowodniliśmy więc tezę indukcyjną, a tym samym dowiedliśmy prawdziwości (2). Zdanie (2) jest równoważne tezie zadania, co kończy dowód. $\square$

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje
można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

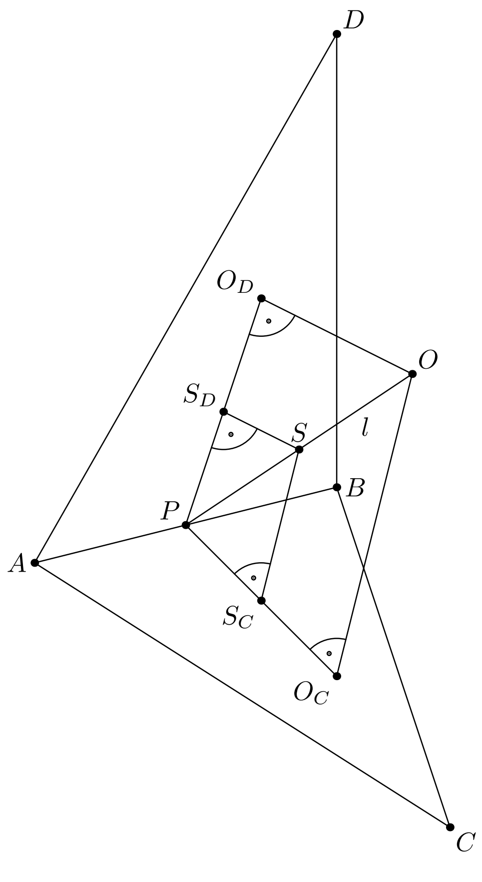
II seria (1 października – 31 października 2009r.)

Zadanie 5. Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej l leży środek sfery wpisanej oraz środek sfery opisanej na czworościanie. Udowodnić, że jeśli prosta l przecina odcinek AB, to $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech S i O oznaczają odpowiednio środek sfery wpisanej i opisanej na czworościanie $ABCD$. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostej l z odcinkiem AB. Punkty S_C i O_C są rzutami prostokątnymi punktów S i O na płaszczyznę ABC, a punkty S_D i O_D – ich rzutami na płaszczyznę ABD. Jest jasne, że S_C, S_D są punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ do ścian ABC i ABD, zaś punkty O_C, O_D są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD.



Punkty P, S_C, O_C są współliniowe jako rzuty protopadłe punktów współliniowych. Podobnie punkty P, S_D, O_D. Wobec tego, na mocy twierdzenia Talesa, zachodzą równości

$$\frac{PO}{OO_C} = \frac{PS}{SS_C} \quad \text{oraz} \quad \frac{PO}{OO_D} = \frac{PS}{SS_D}.$$

Obydwa odcinki SS_C i SS_D są promieniami sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, więc mają równą długość. Stąd $OO_C = OO_D$.

Niech R będzie promieniem sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ oraz $h = OO_C = OO_D$. Z twierdzenia Pitagorasa, promienie okręgów opisanych na trójkątach ABC oraz ABD mają jednakowe długości, równe $r = \sqrt{R^2 - h^2}$. Stąd, na mocy twierdzenia sinusów,

$$\sin \sphericalangle ACB = \frac{AB}{2r} = \sin \sphericalangle ADB.$$

Z założenia zadania obydwa te kąty są ostre, zatem ich miary są równe. □

Sposób II.

Zdefiniujmy punkty S i O tak jak w sposobie I. Ponieważ prosta l przecina odcinek AB, punkty A, B, S, O leżą na jednej płaszczyźnie. Niech będzie to płaszczyzna Π.

Płaszczyzny ABC i ABD są symetryczne względem Π, ponieważ $S \in \Pi$. Wobec tego Π jest dwusieczną kąta dwuściennego pomiędzy tymi płaszczyznami. Co więcej, $O \in \Pi$, więc sfera opisana na czworościanie jest również symetryczna względem Π.

Okręgi opisane na trójkątach ABC i ABD są odpowiednio częściami wspólnymi płaszczyzn ABC i ABD oraz sfery opisanej na czworościanie, więc również są symetryczne względem Π, czyli są przystające.

Kąty ACB i ADB są ostrymi kątami wpisanymi, opartymi na przystających łukach dwóch przystających okręgów. Stąd wnioskujemy, że $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. □

Zadanie 6. Dana jest liczba pierwsza $p \neq 5$ oraz takie liczby całkowite a, b, c, że p jest dzielnikiem obu liczb $a + b + c$ i $a^5 + b^5 + c^5$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb $a^2 + b^2 + c^2$, $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez p.

Rozwiązanie

Sposób I.

Dla dowolnych liczb a, b, c prawdziwa jest następująca tożsamość:

$$5(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) =$$

$$= 6(a^5 + b^5 + c^5) + (2ab^2 + 2a^2b + 2bc^2 + 2b^2c + 2ca^2 + 2c^2a - a^3 - b^3 - c^3 - 6abc)(a + b + c)^2.$$

Z założenia prawa strona równości jest liczbą podzielną przez p. Ponadto $p \neq 5$, więc liczba $(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)$ dzieli się przez p, z czego wynika teza. □

Sposób II.

Z warunków zadania wynika, że $c \equiv -(a + b) \pmod{p}$, zatem

$$0 \equiv 2(a^5 + b^5 - (a + b)^5) = -5ab(a + b)(a^2 + b^2 + (a + b)^2) \equiv 5abc(a^2 + b^2 + c^2) \pmod{p}.$$

Jeżeli p dzieli $a^2 + b^2 + c^2$, to teza zadania jest spełniona. W przeciwnym przypadku, p dzieli iloczyn $5abc$. A ponieważ $p \neq 5$, to p dzieli przynajmniej jedną z liczb a, b, c. Załóżmy więc, bez straty ogólności, że jest to liczba a. Wtedy liczby a^3 oraz $b + c$ dzielą się przez p. Wobec tego liczba

$$a^3 + (b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^3 + b^3 + c^3$$

jest również podzielna przez p, zatem i w tym przypadku teza jest spełniona. □

Zadanie 7. Trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB > 90^\circ$, wpisany jest w okrąg o środku S. Prosta CS przecina odcinek AB w punkcie D. Udowodnić, że jeżeli

$$AC + BC = 2CS,$$

to okręgi wpisane w trójkąty ADC i BDC mają równe promienie.

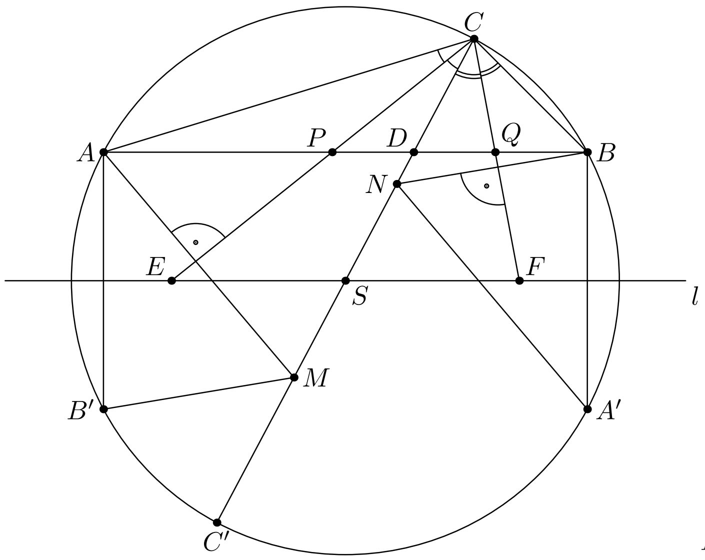
Rozwiązanie

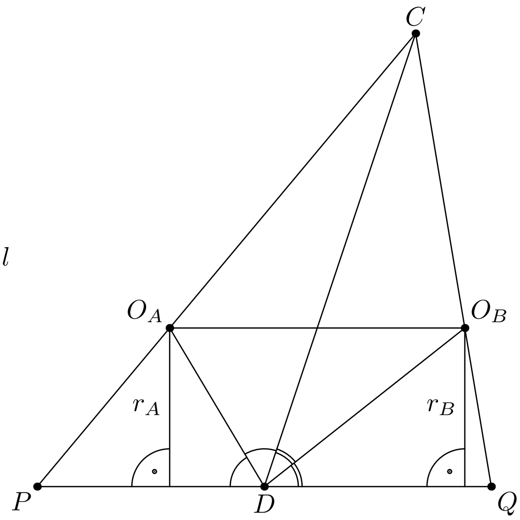
Sposób I.

Rozważmy prostą $l \parallel AB$, przechodzącą przez S. Niech P i Q będą punktami przecięcia prostej AB z dwusiecznymi kątów ACD i BCD, zaś E i F odpowiednio punktami przecięcia prostej l z tymi dwusiecznymi. Przez A', B', C' oznaczmy punkty symetryczne odpowiednio do punktów A, B, C względem punktu S.

Wybierzmy takie punkty M i N na odcinku CC', że $CM = AC$ oraz $CN = BC$. Prosta CE jest symetralną odcinka AM, jako dwusieczna kąta ACM trójkąta równoramiennego ACM. Ponadto prosta l jest symetralną odcinka AB', zatem punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $AB'M$. Analogicznie dowodzimy, że punkt F jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A'BN$.

Z warunków zadania wynika, że $CM+CN = CC'$. Stąd $SM = SN$, więc trójkąt $A'BN$ jest obrazem trójkąta $AB'M$ w symetrii środkowej względem punktu S. Okręgi opisane na tych trójkątach leżą więc symetrycznie względem S. To dowodzi, że $SE = SF$. Stąd, na mocy twierdzenia Talesa, $DP = DQ$.





Oznaczmy odpowiednio przez O_A i O_B środki okręgów wpisanych w trójkąty ADC i BDC, oraz przez r_A oraz r_B promienie okręgów wpisanych w te trójkąty. Punkt O_A leży na odcinku PC, a O_B leży na odcinku CQ. Na mocy twierdzenia o dwusiecznej, zastosowanego do dwusiecznych kątów CDP i CDQ, zachodzą następujące równości:

$$\frac{CO_A}{PO_A} = \frac{CD}{DP} = \frac{CD}{DQ} = \frac{CO_B}{QO_B}\,.$$

Z otrzymanych proporcji wynika, że $O_AO_B \parallel PQ$, co prowadzi do wniosku $r_A = r_B$, czyli do tezy. $\square$

Sposób II.

Niech P, Q będą zdefiniowane jak w sposobie I. Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\beta = \sphericalangle ABC$. Z warunków zadania oraz twierdzenia sinusów, otrzymujemy

$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{BC}{2CS} + \frac{AC}{2CS} = 1. \tag{1}$$

Na mocy twierdzenia o dwusiecznej, zastosowanego do trójkąta ACD,

$$\frac{CD}{DP} = \frac{CA}{AP} = \frac{CD+CA}{DP+AP} = \frac{CA+CD}{AD}.$$

Niech M będzie środkiem odcinka AC. Wtedy

$$\sphericalangle ACD = 90^\circ - \sphericalangle CSM = 90^\circ - \frac{\sphericalangle ASC}{2} = 90^\circ - \beta.$$

Analogicznie $\sphericalangle BCD = 90^\circ - \alpha$. Na mocy twierdzenia sinusów dla trójkąta ACD, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{CA+CD}{AD} &= \frac{\sin\sphericalangle ADC + \sin\sphericalangle CAD}{\sin\sphericalangle ACD} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha + \beta) + \sin\alpha}{\sin(90^\circ - \beta)} = \\
&= \frac{\cos(\alpha-\beta) + \sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha}{\cos\beta} = \\
&= \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha(1+\sin\beta)}{\cos\beta}.
\end{aligned}$$

Po zastosowaniu powyższych równości oraz (1),

$$\frac{CD}{DP} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + (1-\sin\beta)(1+\sin\beta)}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}{\cos\beta} = \cos\alpha + \cos\beta.$$

Analogicznie można udowodnić, że

$$\frac{CD}{DQ} = \cos\beta + \cos\alpha = \frac{CD}{DP}.$$

Stąd $DP = DQ$, a dalej postępujemy tak samo jak w sposobie I. $\square$

Zadanie 8. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c i liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geqslant \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b}\right)\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech $S_n = \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}$. Na mocy nierówności między średnimi potęgowymi, $S_m \geqslant S_n$ dla $m \geqslant n$ (patrz np.: Lev Kourliandtchik, *Wędrówki po krainie nierówności*, Wyd. Adamantan, Toruń 2000, Tw. 3.4.1). W szczególności

$$\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{3}} \geqslant \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

Po podniesieniu obu stron do potęgi $n(n+1)$ otrzymujemy

$$\left(\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{3}\right)^n \geqslant \left(\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\right)^{n+1},$$

czyli

$$\left(\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{a^n+b^n+c^n}\right)^n \geqslant \frac{a^n+b^n+c^n}{3},$$

co jest równoważne nierówności

$$S_n \leqslant \frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{a^n+b^n+c^n}. \tag{2}$$

By udowodnić nierówność (1), wystarczy jeszcze wykazać, że

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{a^n+b^n+c^n} \leqslant \frac{\dfrac{a^{n+1}}{b+c}+\dfrac{b^{n+1}}{c+a}+\dfrac{c^{n+1}}{a+b}}{\dfrac{a^n}{b+c}+\dfrac{b^n}{c+a}+\dfrac{c^n}{a+b}},$$

lub równoważnie

$$(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right) \leqslant (a^n+b^n+c^n)\left(\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{c^{n+1}}{a+b}\right).$$

Po obustronnym pomnożeniu przez $(a+b)(b+c)(c+a)$ i redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy do wykazania nierówność

$$a^{n+2}b^{n+1}+a^{n+1}b^{n+2}+b^{n+2}c^{n+1}+b^{n+1}c^{n+2}+c^{n+2}a^{n+1}+c^{n+1}a^{n+2} \leqslant$$

$$\leqslant a^{n+3}b^n+a^nb^{n+3}+b^{n+3}c^n+b^nc^{n+3}+c^{n+3}a^n+c^na^{n+3}.$$

Jest ona (po dalszych przekształceniach) równoważna nierówności

$$0 \leqslant a^nb^n(a+b)(a-b)^2+b^nc^n(b+c)(b-c)^2+c^na^n(c+a)(c-a)^2$$

prawdziwej dla dowolnych a, b, c rzeczywistych dodatnich. □

Sposób II.

Jak poprzednio, najpierw dowodzimy nierówności (2). Na mocy nierówności między średnimi potęgowymi oraz (2) (z n zastąpionym przez m), dla dowolnego $m \geqslant n$ zachodzi nierówność

$$S_n(a^m + b^m + c^m) \leqslant a^{m+1} + b^{m+1} + c^{m+1}. \tag{3}$$

Prosty rachunek pokazuje, że jeśli nierówność (1) prawdziwa jest dla pewnej trójki liczb (a, b, c), to jest ona prawdziwa także dla trójki $(a', b', c') = (ax, bx, cx)$, gdzie x jest dowolną liczbą dodatnią. Wystarczy zatem udowodnić nierówność (1) przy założeniu $a+b+c = 1$. Możemy wtedy podstawić w (3) $m = n, n+1, n+2, \ldots$ i zsumować uzyskane nierówności; powstałe szeregi są zbieżne, gdyż $0 < a, b, c < 1$. W wyniku tego otrzymamy nierówność

$$S_n\left(\sum_{m=n}^{\infty} a^m + \sum_{m=n}^{\infty} b^m + \sum_{m=n}^{\infty} c^m\right) \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} a^m + \sum_{m=n+1}^{\infty} b^m + \sum_{m=n+1}^{\infty} c^m,$$

która po zastosowaniu wzoru na sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, wygląda następująco:

$$S_n\left(\frac{a^n}{1-a} + \frac{b^n}{1-b} + \frac{c^n}{1-c}\right) \leqslant \frac{a^{n+1}}{1-a} + \frac{b^{n+1}}{1-b} + \frac{c^{n+1}}{1-c},$$

Jest to nierówność równoważna tezie, ponieważ założyliśmy wcześniej, że $a + b + c = 1$. $\square$

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

III seria (1 listopada – 30 listopada 2009r.)

Zadanie 9. Niech $\mathbb{N}_0$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Funkcje $f, g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ spełniają dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ warunek

$$g(f(n)) = g(n) - n\,. \tag{1}$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości $f(0)$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech $m \in \mathbb{N}_0$ będzie jedną z liczb, dla których wartość $g(m)$ jest najmniejsza z możliwych. Jeżeli $m \neq 0$, to

$$g(f(m)) = g(m) - m < g(m),$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $g(m)$ jest najmniejsze z możliwych. Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$ zachodzi $g(0) \leqslant g(n)$, przy czym równość ma miejsce jedynie dla $n = 0$. Ponadto

$$g(f(0)) = g(0) - 0 = g(0),$$

co prowadzi do wniosku $f(0) = 0$.

Pozostaje sprawdzić, czy takie funkcje rzeczywiście istnieją. Biorąc $f(n) = 0$ oraz $g(n) = n$ bez trudu przekonamy się, że funkcje te spełniają warunki zadania. Zatem jedyną możliwą wartością $f(0)$ jest 0.

Sposób II.

Niech f^k oznacza k-krotne złożenie funkcji f, tj.

$$f^k(n) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k \text{ razy}}(n)\ldots)).$$

Korzystając wielokrotnie z (1) w postaci $g(n) = g(f(n)) + n$, otrzymujemy

$$g(0) = g(f(0)) + 0 = g(f^2(0)) + f(0) = g(f^3(0)) + f^2(0) + f(0) = \ldots\,.$$

Zatem dla dowolnego k całkowitego dodatniego zachodzi nierówność

$$f(0) + f^2(0) + f^3(0) + \ldots + f^k(0) \leqslant g(0).$$

Lewa strona nierówności dla żadnego k nie może przekroczyć $g(0)$. Składniki tej sumy są liczbami całkowitymi nieujemnymi, skąd wniosek, że tylko skończenie wiele spośród nich jest liczbami dodatnimi. Zatem istnieje taka liczba całkowita dodatnia t, że $f^k(0) = 0$ dla wszystkich $k \geqslant t$. W takim razie

$$f(0) = f(f^t(0)) = f^{t+1}(0) = 0.$$

Na koniec znów sprawdzamy, że takie funkcje rzeczywiście istnieją.

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieją parami różne liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$, spełniające warunki:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \quad \text{oraz} \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n\,. \quad (1)$$

Rozwiązanie

Sposób I.

Oczywiście $n = 1$ nie spełnia warunków zadania. Dla $n = 2$ mamy warunki $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c$ oraz $a_1a_2 = b_1b_2 = d$. Na mocy wzorów Viéte'a, pierwiastkami trójmianu $x^2 - cx + d$ są liczby a_1, a_2, ale także liczby b_1, b_2, więc $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $n = 2$ też nie spełnia wymaganych warunków.

Udowodnimy następujący fakt: Jeżeli liczba n spełnia warunki zadania, to spełnia je również liczba $n + 3$.

Przyjmijmy więc, że n spełnia podane warunki; istnieją zatem takie parami różne liczby $a_1, a_2, \ldots a_n$, $b_1, b_2, \ldots b_n$, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = S, \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = P.$$

Zauważmy, że liczby

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, 2S, 8S, 9S, b_1, b_2, \ldots, b_n, 3S, 4S, 12S$$

są parami różne. Zachodzą przy tym równości

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot 2S \cdot 8S \cdot 9S = 144PS^3 = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \cdot 3S \cdot 4S \cdot 12S$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 2S + 8S + 9S = 20S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + 3S + 4S + 12S,$$

więc liczba $n + 3$ również spełnia warunki zadania, gdyż w ten sposób zdefiniowane zbiory liczb mają równe sumy i równe iloczyny. $\square$

Dla $n = 3, 4, 5$ znajdujemy następujące liczby, spełniające (1):

- dla $n = 3$: $(a_1, a_2, a_3) = (2, 8, 9)$, $\quad (b_1, b_2, b_3) = (3, 4, 12)$,
- dla $n = 4$: $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 5, 6, 12)$, $\quad (b_1, b_2, b_3, b_4) = (2, 3, 4, 15)$,
- dla $n = 5$: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 4, 8, 9, 10)$, $\quad (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (2, 3, 5, 6, 16)$.

Wobec tego, na mocy indukcji, warunki zadania spełnia każda liczba całkowita n postaci $3 + 3k$, $4 + 3k$, $5 + 3k$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną. Obejmuje to wszystkie liczby całkowite nie mniejsze niż 3, zatem każda liczba całkowita nie mniejsza niż 3 spełnia warunki zadania.

Sposób II.

Podobnie jak w sposobie I, zauważamy, że liczby $n=1$, $n=2$ nie spełniają warunków zadania i znajdujemy odpowiednie liczby a_i, b_i dla $n=3$. Udowodnimy przez indukcję, że każda liczba naturalna większa lub równa 3 spełnia warunki zadania.

Załóżmy indukcyjnie, że dla pewnego n istnieją parami różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, dla których zachodzą równości (1). Niech S oznacza sumę, zaś P iloczyn liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Rozważmy liczby

$$a'_k = \frac{S^n(S^n-1)}{S-1}a_k \ \text{ dla } \ k=1,2,\ldots,n, \quad a'_{n+1}=S^n,$$
$$b'_k = \frac{S^{n-1}(S^n-1)}{S-1}b_k \ \text{ dla } \ k=1,2,\ldots,n, \quad b'_{n+1}=S^{2n}.$$

Są one całkowite dodatnie, gdyż $S-1>0$ jest zawsze dzielnikiem liczby S^n-1. Na mocy założenia indukcyjnego, liczby $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$, a także liczby $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ są parami różne. Ponadto dla dowolnych $k, l \in \{1,2,\ldots,n\}$ zachodzą nierówności:

$$a'_{n+1} < b'_k < \frac{S^n(S^n-1)}{S-1} \leqslant a'_l, \quad b'_k < \frac{S^n(S^n-1)}{S-1} < b'_{n+1}.$$

Oprócz tego $a'_k \neq b'_{n+1}$, gdyż w przeciwnym razie zaszłaby równość $a_k = \frac{S^n(S-1)}{S^n-1}$, a liczba ta nie jest całkowita.

Udowodniliśmy więc, że liczby $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n+1}, b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n+1}$ są parami różne. Pozostaje zauważyć, że

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} a'_k &= S\cdot\frac{S^n(S^n-1)}{S-1} + S^n = \frac{S^n(S^{n+1}-1)}{S-1},\\
\sum_{k=1}^{n+1} b'_k &= S\cdot\frac{S^{n-1}(S^n-1)}{S-1} + S^{2n} = \frac{S^n(S^{n+1}-1)}{S-1} = \sum_{k=1}^{n+1} a'_k,\\
\prod_{k=1}^{n+1} a'_k &= P\cdot\left(\frac{S^n(S^n-1)}{S-1}\right)^n\cdot S^n = \frac{PS^{n^2+n}(S^n-1)^n}{(S-1)^n},\\
\prod_{k=1}^{n+1} b'_k &= P\cdot\left(\frac{S^{n-1}(S^n-1)}{S-1}\right)^n\cdot S^{2n} = \frac{PS^{n^2+n}(S^n-1)^n}{(S-1)^n} = \prod_{k=1}^{n+1} a'_k,
\end{aligned}$$

co kończy krok indukcyjny.

Indukcja rozpoczyna się od $n=3$. Udowodniliśmy więc, że każda liczba $n \geqslant 3$ spełnia warunki zadania.

Sposób III.

Jak w sposobie I, zauważamy, że liczby $n=1,2$ nie spełniają warunków zadania. Rozważmy liczby

$$a_k = k \ \text{ dla } \ k=1,2,\ldots,n-2, \quad a_{n-1}=(n-1)\left(n^{n-1}-\frac{1}{2}n\right), \quad a_n=(n-1)^2 n^{n-1},$$

$$b_k = nk \ \text{ dla } \ k=1,2,\ldots,n-2, \quad b_{n-1}=(n-1)^2, \quad b_n = n(n-1)\left(n^{n-1}-\frac{1}{2}n\right),$$

gdzie $n \geqslant 3$. Są to liczby całkowite dodatnie. Liczby te są parami różne, gdyż

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-2} < b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-2} < b_{n-1} < a_{n-1} < a_n < b_n.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{(n-2)(n-1)}{2} + (n-1)\left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n\right) + (n-1)^2 n^{n-1} = (n-1)(n^n - 1), \\
\sum_{k=1}^{n} b_k &= \frac{n(n-2)(n-1)}{2} + (n-1)^2 + n(n-1)\left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n\right) = (n-1)(n^n - 1), \\
\prod_{k=1}^{n} a_k &= (n-2)! \cdot (n-1)\left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n\right) \cdot (n-1)^2 n^{n-1} = n!(n-1)^2 n^{n-2}\left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n\right), \\
\prod_{k=1}^{n} b_k &= n^{n-2}(n-2)! \cdot (n-1)^2 \cdot n(n-1)\left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n\right) = n!(n-1)^2 n^{n-2}\left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n\right).
\end{aligned}$$

Widzimy więc, że zdefiniowane wcześniej ciągi liczb mają takie same sumy i takie same iloczyny. Zatem liczby o żądanej własności istnieją dla $n \geqslant 3$.

Zadanie 11. Czworokąty wypukłe $ABCD$ i $PQRS$ mają jednakowe pola. Ponadto spełnione są równości:

$$AB = PQ, \quad BC = QR, \quad CD = RS, \quad DA = SP.$$

Dowieść, że istnieją takie punkty P', Q', R', S' leżące na tej samej płaszczyźnie co czworokąt $ABCD$, że

$$AP' = BQ' = CR' = DS'$$

i czworokąty $P'Q'R'S'$ i $PQRS$ są przystające.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw następujący lemat:

Lemat: Istnieją co najwyżej dwa czworokąty (z dokładnością do przystawania) o kolejnych bokach długości a, b, c, d oraz powierzchni F.

Dowód lematu: Niech e będzie przekątną leżącą wewnątrz czworokąta i dzielącą go na trójkąty o bokach a, b, e oraz c, d, e. Skorzystamy z następującego wzoru na pole czworokąta (udowodnimy go w dalszej części rozwiązania):

$$F = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\varphi}, \tag{1}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, zaś φ jest średnią arytmetyczną miar kątów α i β pomiędzy odpowiednio bokami a, b oraz c, d. Przekształcając powyższy wzór otrzymujemy

$$\cos^2\varphi = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - F^2}{abcd},$$

co prowadzi do wniosku, że φ może (dla ustalonych a, b, c, d, F) przyjmować co najwyżej dwie różne wartości. Pozostaje do wykazania, że długości boków oraz miara kąta φ jednoznacznie wyznaczają czworokąt.

Zauważmy, że im dłuższa jest przekątna e, tym większa jest miara kąta α oraz kąta β, a tym samym zwiększa się $\varphi = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Stąd długość przekątnej e jest jednoznacznie wyznaczona przez miarę kąta φ, natomiast długości a, b, c, d, e jednoznacznie wyznaczają czworokąt, co kończy dowód lematu. $\square$

Dowód wzoru (1): Przy oznaczeniach takich jak wyżej, $F = \frac{1}{2}(ab\sin\alpha + cd\sin\beta)$, więc

$$\begin{aligned}16F^2 &= 4a^2b^2\sin^2\alpha + 4c^2d^2\sin^2\beta + 8abcd\sin\alpha\sin\beta = \\ &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha - 4c^2d^2\cos^2\beta + 8abcd\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia cosinusów $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$, zatem

$$2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

co po podniesieniu do kwadratu daje

$$4a^2b^2\cos^2\alpha + 4c^2d^2\cos^2\beta = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 8abcd\cos\alpha\cos\beta.$$

Wstawiając ten wynik do poprzedniego wzoru otrzymamy

$$16F^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd(1 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

Nietrudno się przekonać, że

$$4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

Ponadto

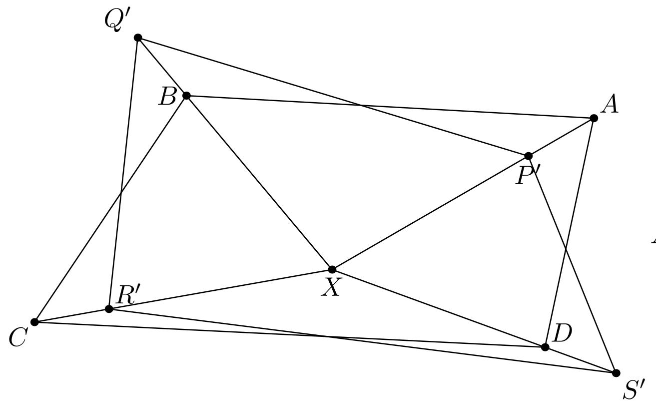
$$2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1 + \cos(\alpha + \beta) = 1 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

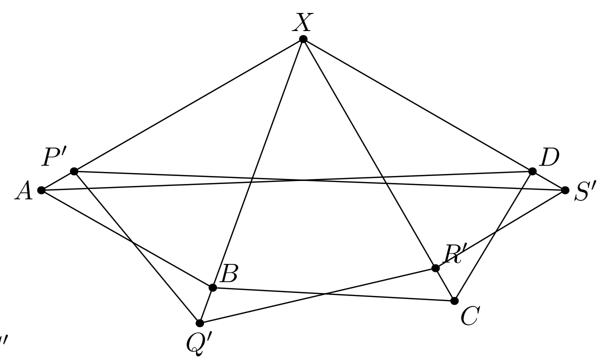
co ostatecznie dowodzi wzoru (1). □

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Zauważmy, że jeżeli $ABCD \equiv PQRS$, to wystarczy wziąć $P'Q'R'S' = ABCD$ i teza zadania jest spełniona. Załóżmy więc, że $ABCD \not\equiv PQRS$. Niech φ_1, φ_2 będą kątami z lematu, odpowiednio dla czworokątów $ABCD$ i $PQRS$ (nie ma znaczenia, w jaki dokładnie sposób symbole a, b, c, d są przypisane kolejnym bokom).

Jeżeli na czworokącie $ABCD$ (lub $PQRS$) można opisać okrąg, to $\varphi_1 = \varphi_2 = 90°$, więc $PQRS \equiv ABCD$, wbrew przyjętemu założeniu. Zatem na żadnym z czworokątów $ABCD, PQRS$ nie można opisać okręgu.

Niech X będzie punktem przecięcia symetralnych odcinków AC, BD. Wtedy oczywiście $AX = CX \neq BX = DX$. Niech $x = AX$ i $y = BX$.





Wybierzmy punkty P', Q', R', S' odpowiednio na półprostych $XA^{\rightarrow}, XB^{\rightarrow}, XC^{\rightarrow}, XD^{\rightarrow}$, w ten sposób, by zachodziły równości:

$$XQ' = XS' = x, \quad XP' = XR' = y.$$

Zauważmy, że X jest także punktem przecięcia się symetralnych odcinków $P'R'$ oraz $Q'S'$, jednak $XA = x \neq y = XP'$. Stąd $ABCD \not\equiv P'Q'R'S'$, natomiast przystające są następujące pary trójkątów:

$$\triangle AXB \equiv \triangle Q'XP', \quad \triangle BXC \equiv \triangle R'XQ', \quad \triangle CXD \equiv \triangle S'XR', \quad \triangle DXA \equiv \triangle P'XS'.$$

Teraz już łatwo dowieść, że czworokąty $ABCD$ i $P'Q'R'S'$ mają jednakowe pola (równe sumom lub różnicom pól odpowiednio przystających trójkątów; rysunki ilustrują różne przypadki). Przy tym $PQRS \not\equiv ABCD$, więc na mocy wcześniej dowiedzionego lematu, $PQRS \equiv P'Q'R'S'$. Ponadto zachodzą równości

$$AP' = BQ' = CR' = DS' = |x - y|,$$

co kończy dowód. □

Uwaga: Przez zapis $ABCD \equiv PQRS$ rozumiemy równość długości kolejnych boków oraz miar kolejnych kątów (jest to przystawanie uwzględniające kolejność wierzchołków). Na przykład jeżeli $ABCD$ i $PQRS$ są rombami o boku długości 1 oraz $\sphericalangle ABC = \sphericalangle QRS = 60°$, to $ABCD \not\equiv PQRS$. Jeżeli natomiast $\sphericalangle ABC = \sphericalangle PQR = 60°$, to $ABCD \equiv PQRS$.

Zadanie 12. Gracze K i F grają w *c–fasolki*, gdzie c jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Gracz K posiada na początku $n \geqslant 2$ pustych kubków. W każdej rundzie wskazuje dowolne dwa rozłączne, niepuste zbiory kubków. Następnie F wybiera jeden ze zbiorów wskazanych przez K i dokłada po jednej fasolce do każdego z kubków w tym zbiorze. Gra kończy się w momencie wybranym przez K, przy czym liczba rund nie może przekroczyć cn. K wygrywa, gdy po zakończeniu gry w każdym kubku znajduje się inna liczba fasolek, w przeciwnym razie wygrywa F. Wyznaczyć wszystkie liczby c o następującej własności: dla każdego $n \geqslant 2$ gracz K ma strategię zapewniającą mu zwycięstwo w c–fasolki.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że własność przedstawioną w zadaniu posiadają wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie $c \geqslant 2$, zaś wszystkie liczby $c < 2$ jej nie posiadają. W tym celu przedstawimy strategię wygrywającą gracza K przy warunku $c = 2$, dla dowolnego n. Strategia zapewniająca K zwycięstwo w 2–fasolki jest oczywiście strategią wygrywającą dla K w c–fasolki dla $c \geqslant 2$. Dowiedziemy też, że jeżeli $c < 2$, to istnieje taka liczba n, dla której strategię wygrywającą ma gracz F.

Nietrudno sprawdzić, że dla $n = 2$ gracz K wygrywa w 2−fasolki po jednej rundzie, natomiast dla $n = 3$ najpóźniej po trzech. Ustalmy $n_0 > 3$. Załóżmy indukcyjnie, że K posiada strategię wygrywającą w 2–fasolki dla wszystkich $n < n_0$. Udowodnimy, że jest to prawda także dla $n = n_0$.

Pomalujmy połowę (zaokrąglając w górę) kubków na biało, a resztę na czarno. Najpierw K chce doprowadzić do stanu, w którym w każdym z białych kubków jest inna liczba ziaren fasoli i w każdym z czarnych kubków jest inna liczba ziaren fasoli (liczby w białych kubkach mogą pokrywać się z liczbami w czarnych). Może to osiągnąć, wybierając za każdym razem dwa zbiory B_1 i B_2 spośród białych kubków wedle strategii dla $n = \lceil n_0/2 \rceil$ oraz dwa zbiory C_1 i C_2 spośród czarnych wedle strategii dla $n = \lfloor n_0/2 \rfloor$, i jako pierwszy zbiór wskazując $B_1 \cup C_1$, a jako drugi $B_2 \cup C_2$. Jeżeli we wszystkich kubkach jednego z kolorów będzie inna liczba ziaren fasoli, wówczas kontynuujemy grę wyłącznie na kubkach drugiego koloru. Na mocy założenia indukcyjnego, po co najwyżej $2\lceil n_0/2 \rceil \leqslant n_0 + 1$ rundach białe kubki zawierają różne liczby ziaren fasoli, jak również czarne kubki zawierają różne liczby ziaren fasoli.

Jest jasne, że teraz dla ustalonej liczby l istnieją co najwyżej dwa kubki, w których jest dokładnie l ziaren. Liczbę l, dla której istnieją dokładnie dwa takie kubki nazwiemy podwójną. Liczbą bezpieczną nazwiemy natomiast taką liczbę m, że istnieje dokładnie jeden kubek, w którym jest m ziaren, oraz nie istnieje liczba podwójna mniejsza od m. K stosuje teraz nastepującą strategię podziału na zbiory: tak długo, jak istnieją liczby podwójne, bierze do każdego ze zbiorów po jednym kubku z każdej pary kubków o tej samej liczbie ziaren. Kubków, w których liczba ziaren nie jest podwójna, nie przydziela do żadnego ze zbiorów.

Zauważmy, że w wyniku stosowania tej strategii nigdy nie otrzymamy trzech kubków z tą samą liczbą ziaren. Faktycznie, dla danej liczby m jest co najwyżej jeden kubek, który przez rundą miał m ziaren i nie otrzymał od gracza F żadnego ziarna, oraz co najwyżej jeden kubek, który miał $m - 1$ ziaren i otrzymał ziarno. Co więcej, jeśli przed rundą jakaś liczba p była bezpieczna, to po niej też jest bezpieczna (bo żaden kubek zawierajacy p lub mniej ziaren nie był w którymkolwiek ze wskazanych zbiorów). Ponadto, najmniejsza liczba podwójna r po rundzie staje się bezpieczna, ponieważ nie pojawi się żadna liczba podwójna mniejsza od niej, a jeden z kubków zawierającycх r ziaren teraz będzie zawierał ich $r + 1$, czyli będzie dokładnie jeden kubek z r ziarnami. Wobec tego, ilość liczb bezpiecznych w każdej rundzie rośnie o co najmniej 1.

Zatem po co najwyżej $n_0 - 1$ rundach mamy przynajmniej $n_0 - 1$ liczb bezpiecznych. Jednak jeżeli $n_0 - 1$ liczb jest bezpiecznych, to istnieje przynajmniej $n_0 - 1$ kubków z unikalną liczbą ziaren, więc ostatni kubek też musi mieć unikalną liczbę ziaren, czyli powstała sytuacja wygrywająca dla gracza K. W sumie wykonano co najwyżej $n_0 + 1$ rund w pierwszej fazie i $n_0 - 1$ rund w drugiej fazie, a więc łącznie nie więcej niż $2n_0$ rund. Stąd, na mocy zasady indukcji, gracz K ma dla dowolnego $n \geqslant 2$ strategię wygrywającą. Z faktu, że ma ją dla $c = 2$ w oczywisty sposób wynika, że dla $c > 2$ również.

Zajmiemy się teraz przypadkiem $c < 2$. Każdemu kubkowi przypiszemy jego poziom. Będzie to liczba $(1 + 2y)^k$, gdzie k oznacza liczbę ziaren fasoli w tym kubku, zaś y jest pewną liczbą rzeczywistą dodatnią. Zauważmy, że jeżeli w tej sytuacji dołożono ziarno fasoli do kubka, to jego poziom wzrasta $1 + 2y$ razy.

Strategia dla gracza F polega na dokładaniu ziaren fasoli do kubków w tym zbiorze, w którym suma poziomów wszystkich kubków jest mniejsza (jeżeli są jednakowe, F wybiera dowolnie). W takim razie, jeżeli przed rundą suma poziomów wszystkich kubków wynosiła A, to po rundzie jest ona równa co najwyżej

$$\frac{A}{2} + \frac{A}{2}(1 + 2y) = A(1 + y).$$

Na początku poziom każdego kubka wynosi 1, więc po zakończeniu gry, czyli nie później niż po cn rundach, suma poziomów wszystkich kubków jest nie większa niż $n(1+y)^{cn}$. Jeśli gracz K wygrał, to pewien kubek zawiera co najmniej $n-1$ ziaren fasoli, zatem suma poziomów wszystkich kubków przekracza $(1 + 2y)^{n-1}$. Wobec tego zachodzi nierówność

$$n(1 + y)^{cn} > (1 + 2y)^{n-1}. \tag{1}$$

Znajdziemy liczby y i n, dla których nierówność (1) nie jest spełniona. Będzie to oznaczało, że (przy opisanej strategii gracza F) gracz K nie może wygrać. W tym celu poszukamy najpierw takiej liczby y, że $1 + 2y > (1 + y)^c$.

Niech $m > \frac{1}{2-c}$ będzie liczbą całkowitą. Ze wzoru dwumianowego wynika, że

$$(1+2y)^m = 1 + 2my + y^2W(y) \quad \text{oraz} \quad (1+y)^{2m-1} = 1 + (2m-1)y + y^2V(y),$$

gdzie W i V są wielomianami zmiennej y, o współczynnikach całkowitych dodatnich. Weźmy takie $y \in (0,1)$, że $0 < yV(1) < 1$. Wtedy

$$(1+2y)^m > 1+2my > 1+2my-y+y^2V(1) > 1+2my-y+y^2V(y) = (1+y)^{2m-1},$$

i mamy postulowaną zależność

$$1+2y > (1+y)^{\frac{2m-1}{m}} > (1+y)^c.$$

Niech $\frac{1+2y}{(1+y)^c} = 1+z$, gdzie $z > 0$. Nierówność (1) przyjmuje teraz postać

$$n(1+2y) > \left(\frac{1+2y}{(1+y)^c}\right)^n = (1+z)^n.$$

Jednak dla $n \geqslant 2$ zachodzi

$$(1+z)^n \geqslant 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2}z^2 > \frac{n^2z^2}{4}\,.$$

Zatem nierówność (1) jest fałszywa dla $n > \frac{4}{z^2}(1+2y)$, przy wcześniej wybranym y.

W ten sposób znaleźliśmy strategię wygrywającą gracza F dla pewnego n, przy założeniu, że $c < 2$. Postawiona na początku rozwiązania teza jest więc dowiedziona.
