LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2010 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2-(y+z+yz)x+(y+z)yz=0\\ y^2-(z+x+zx)y+(z+x)zx=0\\ z^2-(x+y+xy)z+(x+y)xy=0 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Pierwsze równanie danego układu możemy zapisać w postaci

$$(x-(y+z))(x-yz)=0,$$

a więc oznacza ono, że $x=y+z$ lub $x=yz$. Podobnie zapisując dwa pozostałe równania stwierdzamy, że *każda z liczb x, y, z jest sumą lub iloczynem dwóch pozostałych liczb.*

Daje to razem 8 układów równań, z których cztery są następujące:

$$\textbf{1.}\begin{cases} x=y+z\\ y=z+x\\ z=x+y \end{cases},\quad \textbf{2.}\begin{cases} x=y+z\\ y=z+x\\ z=xy \end{cases},\quad \textbf{3.}\begin{cases} x=y+z\\ y=zx\\ z=xy \end{cases},\quad \textbf{4.}\begin{cases} x=yz\\ y=zx\\ z=xy \end{cases},$$

zaś pozostałe cztery powstają z układów **2.** i **3.** przez cykliczne przestawienie zmiennych. Rozwiążemy teraz każdy z układów **1.**–**4.**

Układ **1.** Dodając stronami dwa pierwsze równania dostajemy równość $x+y=y+2z+x$, skąd $z=0$. Podobnie stwierdzamy, że $x=0$ i $y=0$.

Układ **2.** Dodając stronami dwa pierwsze równania widzimy, że $z=0$. Układ sprowadza się zatem do dwóch równań $x=y$ i $xy=0$, skąd $x=y=0$.

Układ **3.** Jeżeli $y=0$ lub $z=0$, to z dwóch ostatnich równań wynika, że $y=z=0$ i pierwsze równanie daje $x=0$. Możemy więc przyjąć, że $y\neq 0$ i $z\neq 0$. Mnożąc stronami równania drugie i trzecie uzyskujemy $yz=x^2yz$, skąd $x^2=1$. W przypadku $x=1$ układ przyjmuje postać $1=y+z$ i $y=z$, skąd $(x,y,z)=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, natomiast w przypadku $x=-1$ układ przyjmuje postać $-1=y+z$ i $y=-z$, prowadząc tym samym do sprzeczności $-1=y+z=0$.

Układ **4.** Przyjmijmy najpierw, że jedna z liczb x, y, z jest równa zeru, na przykład $x=0$. Wtedy drugie i trzecie równanie dają $y=z=0$.

Zakładając natomiast, że liczby x, y, z są różne od zera i mnożąc stronami wszystkie równania układu stwierdzamy, że $xyz=(xyz)^2$, czyli $xyz=1$. W efekcie pierwsze równanie układu oznacza, że $x^2=xyz=1$ i podobnie $y^2=z^2=1$. Każda z liczb x, y, z jest więc równa 1 albo -1 i każda jest iloczynem dwóch pozostałych. Zatem albo wszystkie te liczby są równe 1, albo też dwie są równe -1, a trzecia jest równa 1.

Pozostaje dokonać cyklicznego przestawienia rozwiązań układów **2.** i **3.**, aby wypisać wszystkie rozwiązania układu danego w zadaniu.

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x,y,z) są:

$$(0,0,0) \qquad (1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), \qquad (\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2}), \qquad (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1),$$
$$(1,1,1), \quad (1,-1,-1), \quad (-1,1,-1), \quad (-1,-1,1).$$

Zadanie **2.** Punkty A', B', C' są odpowiednio rzutami prostokątnymi wierzchołków A, B, C czworościanu $ABCD$ na przeciwległe ściany. Dowieść, że jeżeli punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD, punkt B' jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD, zaś punkt C' jest środkiem ciężkości trójkąta ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Rozwiązanie

Skoro punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD, mamy $A'B=A'C=A'D$ i stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych $AA'B$, $AA'C$ i $AA'D$ stwierdzamy, że $AB=AC=AD$.

Następnie, niech X', Y', Z' będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ACD odpowiednio do boków CD, DA, AC. Punkt B' jest środkiem tego okręgu, więc $B'X'=B'Y'=B'Z'$ i na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów prostokątnych $BB'X'$, $BB'Y'$, $BB'Z'$ wnioskujemy o równości długości odcinków BX', BY' i BZ'. Ponieważ odcinki te są wysokościami odpowiednio ścian BCD, BDA i BAC, więc następujące pary trójkątów prostokątnych są przystające: BAY' i BAZ'; BCZ' i BCX'; BDX' i BDY'. Wynika stąd, że

$$(1) \qquad \sphericalangle BAD=\sphericalangle BAC, \quad \sphericalangle BCA=\sphericalangle BCD, \quad \sphericalangle BDC=\sphericalangle BDA.$$

Z zależności $AB=AC=AD$ i $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BAC$ wynika, że trójkąty równoramienne ABC i ABD są przystające (cecha *bok-kąt-bok*). Zatem są one symetryczne względem płaszczyzny π przechodzącej przez prostą AB i środek odcinka CD. To oznacza, że π jest płaszczyzną symetrii czworościanu $ABCD$. Przy tej symetrii punkty A i B pozostają na swoich miejscach, zaś punkt C przechodzi na D. W rezultacie z założenia, iż punkt C' jest środkiem ciężkości trójkąta ABD, wynika, że również rzut prostokątny D' punktu D na ścianę ABC jest jej środkiem ciężkości.

Odcinki CC' i DD' łączące wierzchołek czworościanu $ABCD$ ze środkiem ciężkości przeciwległej ściany przechodzą przez środek ciężkości S czworościanu. Rozpatrując płaszczyznę CDS zawierającą oba te odcinki i wykorzystując ich prostopadłość odpowiednio do ścian ABD i ABC, stwierdzamy, że płaszczyzna CDS jest prostopadła do tych ścian, a więc także do ich wspólnej krawędzi AB. Wobec tego części wspólne płaszczyzny CDS ze ścianami ABD i ABC są prostopadłe do odcinka AB. Z drugiej zaś strony, te części wspólne są środkowymi ścian. Stąd wniosek, że ściany te są trójkątami równoramiennymi, czyli $DA=DB$ oraz $CA=CB$.

Na mocy uzyskanej wcześniej równości długości krawędzi wychodzących z wierzchołka A uzyskujemy więc $AB=AC=AD=BC=BD$. Zatem ściany ABC i ABD są trójkatami równobocznymi. Stosując równości (1) widzimy, że $\sphericalangle BCD=\sphericalangle BCA=60^\circ$ oraz $\sphericalangle BDC=\sphericalangle BDA=60^\circ$. To dowodzi, że ściana BCD również jest trójkątem równobocznym i kończy rozwiązanie.

Zadanie **3.** Dodatnie liczby całkowite k i n spełniają nierówność $k>n!$. Udowodnić, że istnieją różne liczby pierwsze p_1, p_2, p_3, ..., p_n będące odpowiednio dzielnikami liczb $k+1$, $k+2$, $k+3$, ..., $k+n$.

Rozwiązanie

Dla $i=1,2,\ldots,n$ niech a_i oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność tych dzielników liczby $k+i$, które nie przekraczają n.

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb nie przekraczających n jest nie większa niż $n!$, więc w myśl danej w treści zadania zależności $k>n!$ dostajemy

$$a_i<k \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

Z drugiej strony, dla każdego $i=1,2,\ldots,n$ liczba a_i jest najmniejszą wspólną wielokrotnością dzielników liczby $k+i$. Wobec tego sama jest dzielnikiem liczby $k+i$. Liczby

$$\frac{k+1}{a_1},\quad \frac{k+2}{a_2},\quad \frac{k+3}{a_3},\quad \ldots,\quad \frac{k+n}{a_n} \tag{2}$$

są zatem całkowite, a nierówności (1) wskazują, że są one większe od 1.

Wykażemy, że liczby (2) są parami względnie pierwsze. W tym celu rozpatrzmy różne wskaźniki $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. Liczby $k+i$ oraz $k+j$ różnią się o mniej niż n, więc ich największy wspólny dzielnik $d=\mathrm{NWD}(k+i,k+j)$ nie przekracza n i wobec tego jest dzielnikiem liczb a_i oraz a_j. To oznacza, że liczby $\dfrac{k+i}{a_i}$ oraz $\dfrac{k+j}{a_j}$ są odpowiednio dzielnikami liczb $\dfrac{k+i}{d}$ oraz $\dfrac{k+j}{d}$. Te ostatnie są względnie pierwsze na podstawie określenia największego wspólnego dzielnika, co dowodzi własności zapowiedzianej na początku akapitu.

W efekcie liczby (2) są parami względnie pierwszymi liczbami większymi od 1. Są one jednak odpowiednio dzielnikami liczb $k+1$, $k+2$, $k+3$, ..., $k+n$. Teza zadania będzie więc spełniona, jeżeli za p_1, p_2, p_3, ..., p_n przyjmiemy dowolne dzielniki pierwsze odpowiednio liczb (2).

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

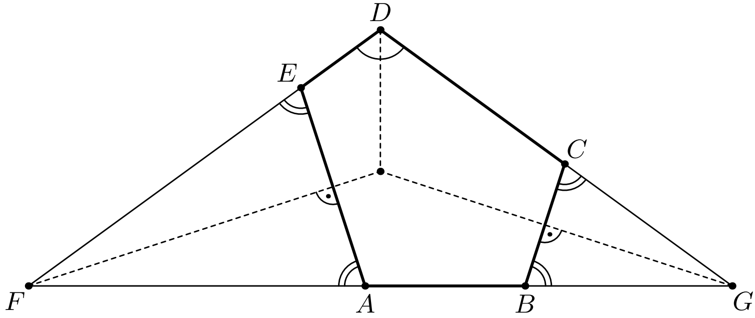
LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2010 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. Wykazać, że symetralna odcinka EA, symetralna odcinka BC i dwusieczna kąta CDE przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie



rys. 1

Przedłużmy boki AB i DE do przecięcia w punkcie F oraz boki AB i CD do przecięcia w punkcie G (rys. 1). Wówczas z równości kątów wewnętrznych danego pięciokąta wynika, że trójkąty EFA i BGC są równoramienne. To zaś oznacza, że symetralne odcinków EA i BC są odpowiednio dwusiecznymi kątów EFA i BGC. Wobec tego trzy proste, o których mowa w treści zadania, są dwusiecznymi kątów wewnętrznych trójkąta FGD, zatem mają punkt wspólny, będący środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie **5.** Wyznaczyć wszystkie takie funkcje monotoniczne f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

(1) $$f(f(x)-y)+f(x+y)=0.$$

(*Uwaga:* Funkcja monotoniczna to funkcja niemalejąca lub nierosnąca.)

Rozwiązanie

Oznaczmy $c=f(0)$; przyjmując $x=0$ w równości (1) dostajemy

(2) $$f(c-y)+f(y)=0 \qquad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } y,$$

skąd w szczególności biorąc $y=0$ uzyskujemy $f(c)+c=0$. Następnie podstawiając w (1) wartości $x=c$ i $y=-c$ stwierdzamy, że $f(f(c)+c)+c=0$, co wraz z uzyskanym przed chwilą warunkiem $f(c)+c=0$ daje $2c=0$, czyli $c=0$. W efekcie zależność (2) pozwala wnioskować, że

$$f(-y)=-f(y) \qquad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } y. \tag{3}$$

Niech teraz t będzie dowolną liczbą rzeczywistą, dla której $f(t)=0$. Biorąc $x=t$ w równości (1) dostajemy $f(-y)+f(t+y)=0$ i łącząc to z własnością (3) widzimy, że $f(t+y)=f(y)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej y.

Jeżeli $t\neq 0$, to funkcja f jest okresowa o okresie t. Jednakże funkcja monotoniczna okresowa musi być stała. Skoro $f(0)=0$, funkcja f jest zerowa; taka funkcja spełnia oczywiście warunki zadania.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, w którym jedyną liczbą rzeczywistą t spełniającą równanie $f(t)=0$ jest liczba $t=0$. Przyjmując wówczas $y=-x$ w zależności (1) otrzymujemy

$$0=f(f(x)+x)+f(0)=f(f(x)+x).$$

Wynika stąd, że $f(x)+x$ jest argumentem, dla którego wartość funkcji f jest równa zeru. Stąd $f(x)+x=0$, czyli $f(x)=-x$ dla dowolnej liczby x. Proste sprawdzenie dowodzi, że ta funkcja również ma żądane własności.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają funkcje $f(x)\equiv 0$ oraz $f(x)=-x$.

Zadanie **6.** Dany jest n-elementowy zbiór liczb rzeczywistych, przy czym $n\geqslant 6$. Dowieść, że istnieje co najmniej $n-1$ dwuelementowych podzbiorów tego zbioru, w których średnia arytmetyczna elementów jest nie mniejsza niż średnia arytmetyczna elementów całego zbioru.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech $a_1>a_2>\ldots>a_n$ będą wszystkimi elementami danego w treści zadania zbioru, a $s=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ niech będzie ich średnią arytmetyczną.

Przyjmijmy

$$b_i=a_i+a_{n+1-i} \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,n.$$

Suma liczb b_1, b_2, ..., b_n jest równa $2(a_1+a_2+\ldots+a_n)=2ns$, więc wśród nich istnieje liczba nie mniejsza niż $2s$. Niech liczbą tą będzie $b_k=a_k+a_{n+1-k}$; możemy przy tym założyć, że $k\leqslant n+1-k$, czyli $k\leqslant\frac{1}{2}(n+1)$.

Z zależności $a_k+a_{n+1-k}\geqslant 2s$ wynika, że nierówność

$$\tfrac{1}{2}(a_i+a_j)\geqslant s$$

zachodzi dla każdej pary wskaźników (i,j), w której $1\leqslant i<j\leqslant k$ oraz dla każdej pary wskaźników (i,j), w której $i\leqslant k<j\leqslant n+1-k$. Każda taka para (i,j) odpowiada dwuelementowemu zbiorowi $\{a_i,a_j\}$ o średniej arytmetycznej elementów nie mniejszej niż s, a przy tym różnym parom odpowiadają różne zbiory.

Pozostaje obliczyć, ile par wskaźników uzyskaliśmy w ten sposób. Liczba par (i,j) spełniających warunek $1\leqslant i<j\leqslant k$ wynosi $\binom{k}{2}$, zaś liczba par (i,j)

spełniających nierówności $i \leqslant k < j \leqslant n+1-k$ jest równa $k(n+1-2k)$. Wskazaliśmy zatem

$$\binom{k}{2} + k(n+1-2k) = \tfrac{1}{2}k(k-1) + k(n+1-2k) = k(n+\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}k).$$

dwuelementowych podzbiorów o średniej arytmetycznej nie mniejszej niż s.

Do zakończenia rozwiązania pozostaje wykazać, że

$$(1) \qquad k(n+\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}k) \geqslant n-1 \qquad \text{dla } n \geqslant 6 \quad \text{i} \quad 1 \leqslant k \leqslant \tfrac{1}{2}(n+1).$$

Wyrażenie $k(n+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}k)$ jest trójmianem kwadratowym zmiennej k o ujemnym współczynniku przy wyrazie kwadratowym, więc przyjmuje ono najmniejszą wartość na końcach przedziału zmienności. Dla $k=1$ i $k=\frac{1}{2}(n+1)$ wartości trójmianu wynoszą odpowiednio $n-1$ i $\frac{1}{8}(n-1)(n+1)$. Dla $n \geqslant 7$ obie wartości są równe co najmniej $n-1$, zaś dla $n=6$ największą całkowitą wartością k w przedziale $1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}(n+1)$ jest $k=3$, dla której wartość trójmianu wynosi $3 \cdot (6+\frac{1}{2}-\frac{3}{2} \cdot 3) = 6 > n-1$. To uzasadnia zależność (1) i kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Przez $\Sigma(S)$ będziemy oznaczać sumę elementów zbioru liczbowego S.

Ponieważ dodanie tej samej liczby do wszystkich elementów danego n-elementowego zbioru X nie wpływa na warunki zadania, więc możemy bez utraty ogólności rozumowania przyjąć, że $\Sigma(X)=0$. Musimy dowieść istnienia co najmniej $n-1$ dwuelementowych zbiorów $S \subset X$, dla których $\Sigma(S) \geqslant 0$.

Niech α oznacza największą liczbę w zbiorze X. Jeżeli wszystkie elementy X są równe co najmniej $-\alpha$, to każdy z $n-1$ zbiorów postaci $\{\alpha, x\}$, gdzie $x \in X \setminus \{\alpha\}$, ma nieujemną sumę elementów i teza zadania jest spełniona. Niech więc zbiór M liczb należących do X i mniejszych od $-\alpha$ ma $t > 0$ elementów i niech K będzie zbiorem t największych liczb w zbiorze X (zauważmy, że M jest zbiorem t najmniejszych liczb).

Jest jasne, że $\Sigma(M) < -t\alpha$ oraz $\Sigma(X \setminus M) \leqslant (n-t)\alpha$. Otrzymujemy stąd

$$0 = \Sigma(X) = \Sigma(M) + \Sigma(X \setminus M) < -t\alpha + (n-t)\alpha = (n-2t)\alpha,$$

skąd $n > 2t$. Wobec tego zbiory K i M są rozłączne, a zbiór $L = X \setminus (K \cup M)$ jest niepusty. Ponadto nierówności $\Sigma(M) < -t\alpha$ i $\Sigma(K) \leqslant t\alpha$ wskazują, że $\Sigma(K \cup M) < 0$, czyli

$$\Sigma(L) > 0.$$

Wobec tego największy element β zbioru L jest liczbą dodatnią.

Wszystkie liczby w zbiorze K są dodatnie, gdyż są większe od β. Zatem każdy dwuelementowy podzbiór S zbioru $(t+1)$-elementowego $K \cup \{\beta\}$ spełnia nierówność $\Sigma(S) > 0$. Ponadto wszystkie elementy zbioru L są równe co najmniej $-\alpha$, co daje $\Sigma(\{\alpha, x\}) \geqslant 0$ dla x będącego dowolnym z $n-2t-1$ elementów zbioru $L \setminus \{\beta\}$. Liczba otrzymanych w ten sposób dwuelementowych podzbiorów o nieujemnej sumie elementów wynosi

$$\binom{t+1}{2}+(n-2t-1)=\tfrac{1}{2}t(t-3)+n-1.$$

Jeżeli $t\geqslant 3$, to powyższa liczba jest równa co najmniej $n-1$ i rozwiązanie zadania jest zakończone. Natomiast dla $t=1$ lub $t=2$ mamy $\frac{1}{2}t(t-3)=-1$ i do dokończenia rozwiązania należy wskazać jeszcze jeden, różny od wymienionych powyżej, dwuelementowy podzbiór o nieujemnej sumie elementów. Jednak na mocy nierówności $n\geqslant 6$ dostajemy $n-2t\geqslant 6-2\cdot 2=2$; zbiór L ma zatem przynajmniej 2 elementy i nierówność $\Sigma(L)>0$ dowodzi, że szukanym podzbiorem jest zbiór dwóch największych elementów zbioru L.

To kończy rozwiązanie.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`