LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

21 kwietnia 2010 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dana jest liczba całkowita $n>1$ i zbiór $S\subseteq\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ mający więcej niż $\frac{3}{4}n$ elementów. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite a, b, c, że reszty z dzielenia przez n liczb

$$a,\quad b,\quad c,\quad a+b,\quad a+c,\quad b+c,\quad a+b+c$$

należą do zbioru S.

2. Dodatnie liczby wymierne a i b spełniają równość

$$a^3+4a^2b=4a^2+b^4.$$

Udowodnić, że liczba $\sqrt{a}-1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Punkty A, P, B, D leżą w tej kolejności na jednym okręgu. Proste AP i CD przecinają się w punkcie Q. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ. Wykazać, że jeśli $D\neq O$, to proste AD i DO są prostopadłe.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

22 kwietnia 2010 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wewnątrz boku BC trójkąta ABC leżą różne punkty D i E, przy czym $BD < BE$. Niech p_1 i p_2 oznaczają odpowiednio obwody trójkątów ABC i ADE. Udowodnić, że

$$p_1 > p_2 + 2 \cdot \min\{BD, EC\}.$$

5. Liczba pierwsza $p > 3$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Niech

$$a_k = k^2 + k + 1 \qquad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots, p-1.$$

Wykazać, że iloczyn $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{p-1}$ daje resztę 3 z dzielenia przez p.

6. Dana jest liczba rzeczywista $C > 1$. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, $\ldots$, w którym $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, spełnia warunki

$$a_{mn} = a_m a_n \qquad \text{oraz} \qquad a_{m+n} \leqslant C(a_m + a_n)$$

dla $m, n = 1, 2, 3, \ldots$. Dowieść, że

$$a_n = n \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.