# LXII Olimpiada Matematyczna

## Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września 2010 r. – 4 października 2010 r.)

**1.** Wyznaczyć wszystkie takie pary $(a,b)$ liczb wymiernych dodatnich, że

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{4+\sqrt{7}}.$$

**2.** Dane są liczby całkowite dodatnie $m$, $n$ oraz $d$. Udowodnić, że jeżeli liczby $m^2n+1$ i $mn^2+1$ są podzielne przez $d$, to również liczby $m^3+1$ i $n^3+1$ są podzielne przez $d$.

**3.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty $M$ i $N$ są odpowiednio środkami boków $AB$ i $CD$, zaś przekątne przecinają się w punkcie $E$. Wykazać, że prosta zawierająca dwusieczną kąta $BEC$ jest prostopadła do prostej $MN$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AC=BD$.

**4.** Dana jest liczba naturalna $k$. Dowieść, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mającego więcej niż $3^k$ elementów, można wybrać $(k+1)$-elementowy podzbiór $S$ o nastepującej własności:

Dla dowolnych dwóch różnych podzbiorów $A,B\subseteq S$ suma wszystkich elementów zbioru $A$ jest różna od sumy wszystkich elementów zbioru $B$. (Przyjmujemy, że suma elementów zbioru pustego wynosi 0.)

*Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia*

**4 października 2010 r.**

*(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

# LXII Olimpiada Matematyczna

**Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego**

II seria (5 października 2010 r. – 4 listopada 2010 r.)

**5.** Krawędzie dwunastościanu foremnego chcemy ponumerować liczbami 1, 2, …, 30, używając każdej z nich dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić tak, aby suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była:
a) parzysta;
b) podzielna przez 4.

**6.** Dodatnie liczby rzeczywiste $a$, $b$, $c$ spełniają warunek
$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3+b^3+c^3.$$
Udowodnić, że
$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}} \geqslant \sqrt{3}.$$

**7.** Znaleźć wszystkie takie pary $(a,b)$ różnych liczb całkowitych dodatnich, że liczba $b^2+ab+4$ jest podzielna przez liczbę $a^2+ab+4$.

**8.** Punkt $M$ jest środkiem boku $BC$ trójkąta ostrokątnego $ABC$. Punkt $K$ leży na boku $BC$ i spełnia warunek $\sphericalangle BAM = \sphericalangle KAC$. Na odcinku $AK$ wybrano taki punkt $E$, że $\sphericalangle BEK = \sphericalangle BAC$. Dowieść, że
$$\sphericalangle KEC = \sphericalangle BAC.$$

*Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia*

**4 listopada 2010 r.**

*(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

# LXII Olimpiada Matematyczna

**Zadania konkursowe**
**zawodów stopnia pierwszego**

III seria (5 listopada 2010 r. – 6 grudnia 2010 r.)

**9.** Wykazać, że dowolny czworokąt wypukły można rozciąć na 7 deltoidów.

**10.** Dane są różne nieparzyste liczby pierwsze $p$ i $q$. Dowieść, że liczba $2^{pq}-1$ ma co najmniej 3 różne dzielniki pierwsze.

**11.** W czworościanie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe.

**12.** Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f$ określone na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x$, $y$ spełniona jest równość

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

*Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia*

**6 grudnia 2010 r.**

*(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

## Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UAM, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UMK, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-956 Warszawa

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

---

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`