LXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

18 lutego 2011 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x-y)(x^3+y^3)=7 \\ (x+y)(x^3-y^3)=3 \end{cases}$$

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB<BC$ oraz $AD<CD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $PB=AB$ oraz $QD=AD$. Punkt M jest środkiem odcinka PQ. Wykazać, że jeśli kąt BMD jest prosty, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

3. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych x_1, x_2, ..., x_{2011}, y_1, y_2, ..., y_{2011} iloczyn

$$(2x_1^2+3y_1^2)(2x_2^2+3y_2^2)\dots(2x_{2011}^2+3y_{2011}^2)$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2011 r. (drugi dzień zawodów)

4. Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej kolejności na półokręgu o środku O, przy czym $AD=BE=CF$. Cięciwa BE przecina cięciwy AD i CF odpowiednio w punktach G i H. Wykazać, że

$$\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle GOH.$$

(*Uwaga:* Środkiem półokręgu jest środek zawierającego go okręgu.)

5. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ wyznaczyć największą możliwą długość takiego ciągu o wyrazach w zbiorze n-elementowym, że żadne jego dwa sąsiednie wyrazy nie są równe, a ponadto nie można w wyniku wykreślenia wszystkich jego wyrazów z wyjątkiem czterech otrzymać ciągu postaci x, y, x, y, gdzie $x \neq y$.

6. Różne wielomiany P i Q o współczynnikach rzeczywistych spełniają warunek

$$P(Q(x)) = Q(P(x))$$

dla każdego x. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n wielomian

$$\underbrace{P(P(\ldots P(P}_{n}(x))\ldots)) - \underbrace{Q(Q(\ldots Q(Q}_{n}(x))\ldots))$$

jest podzielny przez wielomian $P(x) - Q(x)$.

(*Uwaga:* Wielomian $F(x)$ jest podzielny przez wielomian $G(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $H(x)$, że $F(x) = G(x)H(x)$ dla każdego x.)

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.