LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

18 lutego 2011 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$(1) \qquad \begin{cases} (x-y)(x^3+y^3)=7 \\ (x+y)(x^3-y^3)=3 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Stosując wzory na sumę i różnicę sześcianów widzimy, że

$$(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)=7 \quad \text{oraz} \quad (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)=3.$$

Prawe strony powyższych równań są różne od zera, więc lewe także i możemy podzielić te równania stronami. Otrzymujemy

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{7}{3}, \qquad \text{czyli} \qquad 3(x^2-xy+y^2)=7(x^2+xy+y^2).$$

Wobec tego $0=4x^2+10xy+4y^2=2(2x+y)(x+2y)$. Stąd dostajemy dwie możliwości: $x=-2y$ lub $y=-2x$.

Dla $x=-2y$ układ (1) sprowadza się do dwóch zależności: $-3y\cdot(-7y^3)=7$ oraz $-y\cdot(-9y^3)=3$, skąd uzyskujemy $y^4=\frac{1}{3}$. To daje dwie pary (x,y) będące rozwiązaniami układu: $(\frac{2}{\sqrt[4]{3}},-\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$ i $(-\frac{2}{\sqrt[4]{3}},\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$.

Natomiast dla $y=-2x$ pierwsze równanie układu (1) przyjmuje postać $3x\cdot(-7x^3)=7$, czyli $x^4=-\frac{1}{3}$, a więc nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x,y) są $(\frac{2}{\sqrt[4]{3}},-\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$ oraz $(-\frac{2}{\sqrt[4]{3}},\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$.

Zadanie **2.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB<BC$ oraz $AD<CD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $PB=AB$ oraz $QD=AD$. Punkt M jest środkiem odcinka PQ. Wykazać, że jeśli kąt BMD jest prosty, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

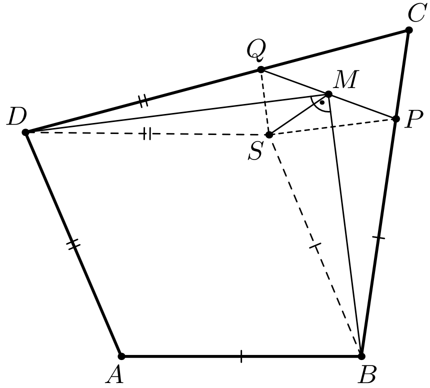
Rozwiązanie

Niech S oznacza punkt symetryczny do punktu P względem prostej BM (rys. 1). Z równości $\sphericalangle BMD=90^\circ$ wynika, że

$$\sphericalangle BMP+\sphericalangle DMQ=90^\circ=\sphericalangle BMS+\sphericalangle DMS,$$

a skoro $\sphericalangle BMP=\sphericalangle BMS$, więc mamy także $\sphericalangle DMQ=\sphericalangle DMS$. Ponadto $MS=MP=MQ$ i w rezultacie punkt S jest symetryczny do Q względem prostej DM. Z obu symetrii uzyskujemy

$$SB=PB=AB \qquad \text{oraz} \qquad SD=QD=AD.$$



rys. 1

Równości $SB=AB$ i $SD=AD$ dowodzą, że punkty S i A są symetryczne względem prostej BD, bądź też pokrywają się. Ta druga możliwość jednak odpada, mielibyśmy bowiem wtedy $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DSM + \sphericalangle MSB$. Jednakże

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\sphericalangle DSM + \sphericalangle MSB = \sphericalangle DQM + \sphericalangle BPM = \\ &\qquad = 180^\circ - \sphericalangle CQP + 180^\circ - \sphericalangle CPQ = 180^\circ + \sphericalangle DCB, \end{aligned}$$

skąd wynikałaby niedorzeczna nierówność $\sphericalangle DAB > 180^\circ$. Wobec tego punkty S i A są symetryczne względem prostej BD. Stąd i z zależności (1) dostajemy

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DSB = 360^\circ - (\sphericalangle DSM + \sphericalangle MSB) = 180^\circ - \sphericalangle DCB,$$

co pociąga za sobą tezę zadania.

Zadanie **3.** Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych x_1, x_2, ..., x_{2011}, y_1, y_2, ..., y_{2011} iloczyn

$$(1)\qquad (2x_1^2+3y_1^2)(2x_2^2+3y_2^2)\ldots(2x_{2011}^2+3y_{2011}^2)$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że dany w treści zadania iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej dla pewnych wartości zmiennych.

Możemy przyjąć, że w każdej z par (x_i, y_i) dla $i=1,2,\ldots,2011$ przynajmniej jedna z liczb nie jest podzielna przez 3. Jeżeli bowiem liczby x_i i y_i są obie podzielne przez 3, to zastępując je liczbami całkowitymi $\frac{1}{3}x_i$ i $\frac{1}{3}y_i$ zmniejszamy 9 razy wartość iloczynu (1), zatem będzie on nadal kwadratem liczby całkowitej. Kontynuując to postępowanie doprowadzimy w końcu do sytuacji opisanej w pierwszym zdaniu akapitu.

Zauważmy następnie, że kwadrat liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 z dzielenia przez 3. Rzeczywiście, jeśli liczba y nie jest podzielna przez 3, to podzielna przez 3 jest jedna z liczb $y-1$, $y+1$, a więc stwierdzenie wynika z równości $y^2=(y-1)(y+1)+1$.

Jeżeli liczba x_i nie jest podzielna przez 3, to liczba $2x_i^2+3y_i^2$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Jeżeli zaś $x_i=3z_i$ dla pewnej liczby całkowitej z_i, to $2x_i^2+3y_i^2=3(6z_i^2+y_i^2)$ i ponieważ y_i nie jest wówczas podzielne przez 3, więc liczba w nawiasie daje resztę 1 z dzielenia przez 3.

Tak więc każdy z 2011 czynników iloczynu (1) albo daje resztę 2 z dzielenia przez 3 (nazwijmy taki czynnik *białym*), albo jest trzykrotnością liczby dającej resztę 1 z dzielenia przez 3 (nazwijmy go wtedy *czarnym*). Iloczyn (1) jest kwadratem liczby całkowitej, skąd liczba trójek występująca w jego rozkładzie na czynniki pierwsze musi być parzysta. Zatem liczba czynników czarnych jest parzysta, a ich iloczyn ma postać $3^{2n}(3k+1)$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych n i k.

Ponieważ liczba wszystkich czynników jest nieparzysta, więc liczba białych czynników jest także nieparzysta. A stąd wynika, że iloczyn białych czynników daje resztę 2 z dzielenia przez 3; oznaczmy ten iloczyn przez $3\ell+2$. Tym samym iloczyn (1) jest równy $3^{2n}(3k+1)(3\ell+2)$, czyli $3^{2n}(9k\ell+6k+3\ell+2)$. Skoro jest on kwadratem liczby całkowitej, więc kwadratem jest także liczba stojąca w nawiasie. To jednak prowadzi do sprzeczności, gdyż liczba ta daje resztę 2 z dzielenia przez 3.

Wykazaliśmy zatem, że iloczyn (1) nie jest kwadratem liczby całkowitej.

LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2011 r. (drugi dzień zawodów)

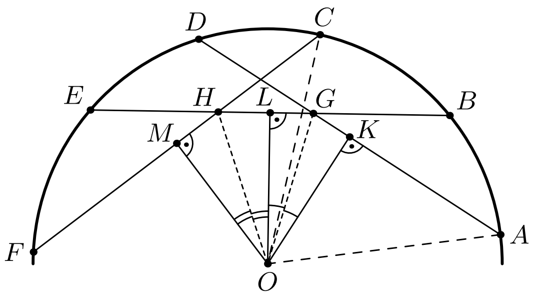
Zadanie **4.** Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej kolejności na półokręgu o środku O, przy czym $AD=BE=CF$. Cięciwa BE przecina cięciwy AD i CF odpowiednio w punktach G i H. Wykazać, że

$$\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle GOH.$$

(*Uwaga:* Środkiem półokręgu jest środek zawierającego go okręgu.)

Rozwiązanie

Niech K, L, M będą odpowiednio środkami cięciw AD, BE, CF (rys. 2).



rys. 2

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów OKA i OLB otrzymujemy

$$OK^2 = OA^2 - (\tfrac{1}{2}AD)^2 \quad \text{oraz} \quad OL^2 = OB^2 - (\tfrac{1}{2}BE)^2,$$

zatem na mocy założeń zadania mamy $OK=OL$. Stosując ponadto twierdzenie Pitagorasa do trójkątów OKG i OLG widzimy, że

$$GL^2 = OG^2 - OL^2 = OG^2 - OK^2 = GK^2,$$

skąd $GK=GL$. Wobec tego punkty K i L są symetryczne względem prostej OG albo pokrywają się — to drugie jednak odpada, gdyż z relacji $OK \perp AD$ i $OL \perp BE$ wynikałaby wtedy równoległość cięciw AD i BE. Tak więc $2\sphericalangle GOL = \sphericalangle KOL$. Podobnie dowodzimy, że $2\sphericalangle HOL = \sphericalangle MOL$. Ponadto punkty K i M leżą po przeciwnych stronach prostej OL. W efekcie

$$2\sphericalangle GOH = 2(\sphericalangle GOL + \sphericalangle HOL) = \sphericalangle KOL + \sphericalangle MOL = \sphericalangle KOM.$$

Pozostaje udowodnić, że $\sphericalangle KOM = \sphericalangle AOC$. Jednakże

$$\sphericalangle AOK + \sphericalangle KOM = \sphericalangle AOM = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COM,$$

więc postulowana równość jest równoważna równości $\sphericalangle AOK = \sphericalangle COM$. A ta ostatnia zależność jest prawdziwa ze względu na przystawanie trójkątów prostokątnych AKO i CMO, w których $AK=CM$ i $OK=OM$.

Zadanie **5.** Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ wyznaczyć największą możliwą długość takiego ciągu o wyrazach w zbiorze n-elementowym, że żadne jego dwa sąsiednie wyrazy nie są równe, a ponadto nie można w wyniku wykreślenia wszystkich jego wyrazów z wyjątkiem czterech otrzymać ciągu postaci x, y, x, y, gdzie $x \neq y$.

Rozwiązanie

Niech c_n oznacza poszukiwaną największą długość.

Rozważmy ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ o wyrazach w zbiorze n-elementowym, mający opisaną własność. Wśród wszystkich wartości występujących w tym ciągu niech u będzie tą, której pierwsze wystąpienie w ciągu jest najdalsze; oznaczmy je przez $a_\ell = u$. Zatem każdy element różny od u, który występuje chociaż raz w tym ciągu, jest obecny wśród wyrazów a_1, a_2, $\ldots$, $a_{\ell-1}$.

Wykażemy, że element u pojawia się w ciągu tylko raz.

Przypuśćmy, że wyraz $a_m = u$ jest drugim wystąpieniem elementu u w rozważanym ciągu. Oczywiście $a_{\ell+1} = w \neq u$, gdyż na mocy warunków zadania sąsiednie wyrazy a_ℓ i $a_{\ell+1}$ są różne. W takim razie $m \geqslant \ell + 2$. Ponadto — na mocy określenia u — wśród wyrazów a_1, a_2, $\ldots$, $a_{\ell-1}$ występuje w, czyli $a_i = w$ dla pewnego $i \leqslant \ell - 1$. Jednak wówczas skreślając wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem a_i, a_ℓ, $a_{\ell+1}$, a_m otrzymujemy ciąg postaci w, u, w, u, w sprzeczności z założeniami zadania.

Istotnie więc wystąpienie elementu u w ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ jest pojedyncze. Wykreślmy z ciągu wyraz $a_\ell = u$. Ponadto jeśli wyrazy $a_{\ell-1}$ i $a_{\ell+1}$ były równe, to wykreślmy także jeden z nich. Otrzymamy w ten sposób ciąg o długości co najmniej $k-2$, w którym występuje co najwyżej $n-1$ różnych wyrazów, i nie zawierający dwóch jednakowych sąsiednich wyrazów. Stąd wniosek, że ciąg ten spełnia warunki zadania, jeżeli tylko $n-1 \geqslant 3$. Zatem dla $n \geqslant 4$ mamy $k-2 \leqslant c_{n-1}$. Przyjmując $c_2 = 3$ widzimy, że nierówność ta jest prawdziwa także dla $n = 3$. Każdy bowiem ciąg o długości co najmniej 4 o wyrazach ze zbioru dwuelementowego, nie zawierający dwóch jednakowych sąsiednich wyrazów, zaczyna się od podciągu postaci x, y, x, y.

Jednak k jest długością dowolnie wybranego dozwolonego ciągu o wyrazach w zbiorze n-elementowym. Zatem z zależności $k-2 \leqslant c_{n-1}$ otrzymujemy

$$c_n \leqslant c_{n-1} + 2 \qquad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Skoro $c_2 = 3$, więc przez prostą indukcję uzyskujemy $c_n \leqslant 2n-1$ dla każdego n.

Na koniec zauważmy, że $(2n-1)$-wyrazowy ciąg

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n-1,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1$$

o wyrazach ze zbioru n-elementowego ma postulowaną własność.

Odpowiedź: Szukana największa długość ciągu wynosi $2n-1$.

Zadanie **6.** Różne wielomiany P i Q o współczynnikach rzeczywistych spełniają warunek

$$P(Q(x)) = Q(P(x))$$

dla każdego x. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n wielomian

$$\underbrace{P(P(\ldots P(P}_{n}(x))\ldots)) - \underbrace{Q(Q(\ldots Q(Q}_{n}(x))\ldots))$$

jest podzielny przez wielomian $P(x)-Q(x)$.

(*Uwaga:* Wielomian $F(x)$ jest podzielny przez wielomian $G(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $H(x)$, że $F(x)=G(x)H(x)$ dla każdego x.)

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

Jeżeli F, G i H są dowolnymi wielomianami, przy czym G i H są różne, to wielomian $F(G(x))-F(H(x))$ jest podzielny przez wielomian $G(x)-H(x)$.

Dowód lematu

Niech wielomian F ma postać $F(x) = c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. Wtedy wielomian $F(G(x))-F(H(x))$ można zapisać jako sumę m wielomianów $c_k[G(x)^k - H(x)^k]$ dla $k=1,2,\ldots,m$, z których każdy jest podzielny przez wielomian $G(x)-H(x)$ na mocy tożsamości

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

w której podstawiamy $a = G(x)$ oraz $b = H(x)$. To dowodzi lematu.

Przystępujemy do rozwiązania zadania. Wprowadźmy oznaczenie

$$F_n(x) = \underbrace{F(F(\ldots F(F}_{n}(x))\ldots)) \qquad \text{dla } n = 1,2,3,\ldots;$$

teza zadania sprowadza się więc do wykazania, że dla każdego n wielomian $P_n(x)-Q_n(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)-Q(x)$.

Zastosujemy indukcję ze względu na n.

Dla $n=1$ teza jest oczywiście prawdziwa. Przypuśćmy z kolei, że wielomian $P_n(x)-Q_n(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)-Q(x)$. Wówczas

$$(1) \quad P_{n+1}(x) - Q_{n+1}(x) = [P_n(P(x)) - P_n(Q(x))] + [P_n(Q(x)) - Q_n(Q(x))].$$

Na mocy lematu zastosowanego dla $F=P_n$, $G=P$ i $H=Q$ wielomian w pierwszym nawiasie kwadratowym jest podzielny przez $P(x)-Q(x)$.

Z równości $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla każdej liczby x wynika ponadto, że

$$P_n(Q(x)) = \underbrace{P(P(\ldots P(P}_{n-1}(P(Q(x))))\ldots)) = \underbrace{P(P(\ldots P(P}_{n-1}(Q(P(x))))\ldots)) =$$

$$= \underbrace{P(P(\ldots P}_{n-2}(Q(P(P(x))))\ldots)) = \ldots = Q(P_n(x))$$

dla każdego x. Zatem wielomian w drugim nawiasie kwadratowym po prawej stronie zależności (1) jest równy $Q(P_n(x)) - Q(Q_n(x))$. Stosując lemat dla $F = Q$, $G = P_n$ i $H = Q_n$ stwierdzamy, że wielomian ten jest podzielny przez $P_n(x) - Q_n(x)$, a więc — w myśl założenia indukcyjnego — tym bardziej przez $P(x) - Q(x)$.

Wobec tego równość (1) wskazuje, że $P_{n+1}(x) - Q_{n+1}(x)$ jest sumą dwóch wielomianów podzielnych przez $P(x) - Q(x)$, co kończy dowód indukcyjny.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`