LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

13 kwietnia 2011 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$ o następującej własności: istnieje taka permutacja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ jest podzielna przez k.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że liczby $n = 1$ i $n = 3$ spełniają warunki zadania: dla $n = 3$ postulowaną permutacją jest $(a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 2)$.

Przyjmijmy, że inna liczba n ma żądaną własność. Suma

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

jest podzielna przez n, zatem liczba $\frac{1}{2}(n+1)$ musi być całkowita, czyli n jest liczbą nieparzystą. W szczególności $n \geqslant 5$. Ponadto suma

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = \tfrac{1}{2}n(n+1) - a_n$$

jest podzielna przez $n - 1$, a ponieważ liczba

$$\tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}(n+1) \cdot (n-1) + \tfrac{1}{2}(n+1)$$

daje resztę $\frac{1}{2}(n+1)$ z dzielenia przez $n - 1$, więc tę samą resztę daje również liczba a_n. Jedyną taką liczbą w przedziale $\langle 1; n \rangle$ jest $\frac{1}{2}(n+1)$, skąd

$$a_n = \tfrac{1}{2}(n+1).$$

Wobec tego

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} = \tfrac{1}{2}n(n+1) - a_n = \tfrac{1}{2}n(n+1) - \tfrac{1}{2}(n+1) = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1).$$

Suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}$ jest podzielna przez $n-2$ i w takim razie liczba a_{n-1} daje z dzielenia przez $n - 2$ tę samą resztę, co liczba

$$\tfrac{1}{2}(n^2 - 1) = \tfrac{1}{2}(n+1) \cdot (n-2) + \tfrac{1}{2}(n+1),$$

czyli tę samą resztę, co liczba $\frac{1}{2}(n+1)$. Z nierówności $n \geqslant 5$ dostajemy

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(n+1) - (n-2) &= -\tfrac{1}{2}(n-5) \leqslant 0, \\ \tfrac{1}{2}(n+1) + (n-2) &= n + \tfrac{1}{2}(n-3) > n, \end{aligned}$$

więc jedyną liczbą w przedziale $\langle 1; n \rangle$ dającą resztę $\frac{1}{2}(n+1)$ z dzielenia przez $n - 2$ jest liczba

$$a_{n-1} = \tfrac{1}{2}(n+1).$$

Otrzymujemy zatem $a_{n-1} = a_n$, wbrew temu, że ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest permutacją ciągu $(1, 2, \ldots, n)$. Sprzeczność dowodzi, że nie ma innych rozwiązań.

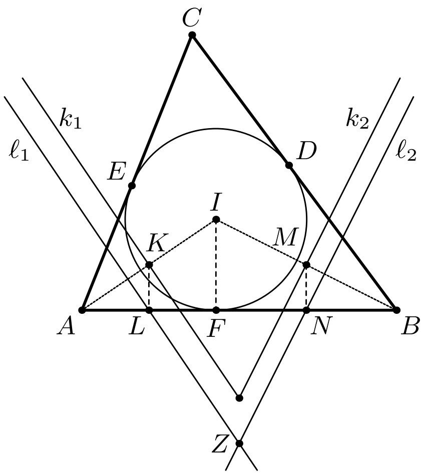
Odpowiedź: Szukanymi liczbami są $n = 1$ oraz $n = 3$.

Zadanie **2.** Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prowadzimy trzy proste: przez środki odcinków AE i AF, przez środki odcinków BF i BD oraz przez środki odcinków CD i CE. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie wyznaczonym przez te trzy proste pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

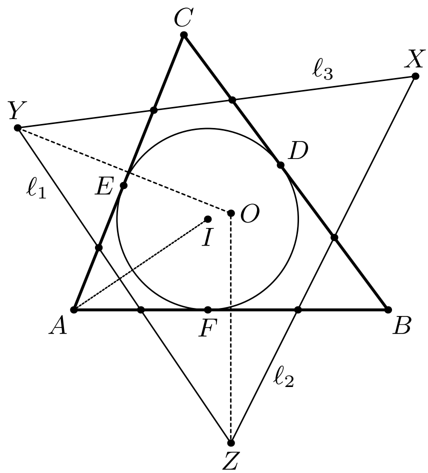
Rozwiązanie

Niech ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 będą odpowiednio trzema prostymi określonymi w treści zadania. Udowodnimy najpierw, że punkt przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_2 leży na symetralnej odcinka AB.

Oznaczmy przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Niech K, L, M, N będą odpowiednio środkami odcinków AI, AF, BI, BF (rys. 1). Oznaczmy wreszcie przez k_1 i k_2 odpowiednio symetralne odcinków AI i BI. Punkt przecięcia tych symetralnych jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AIB, zatem leży on na symetralnej odcinka AB.



rys. 1



rys. 2

Trójkąt EAF jest równoramienny, więc prosta ℓ_1 przechodząca przez środki jego ramion jest prostopadła do prostej AI. To oznacza, że $\ell_1 \parallel k_1$. Ponadto $K \in k_1$ oraz $L \in \ell_1$, czyli prosta ℓ_1 powstaje z prostej k_1 w wyniku przesunięcia o wektor $\overrightarrow{KL}$. Zauważmy też, że na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IF}$.

Analogiczne rozumowanie dowodzi, że prosta ℓ_2 powstaje z prostej k_2 w wyniku przesunięcia o wektor $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IF}$. Stąd wniosek, że punkt przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_2 jest przesunięciem o wektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{IF}$ punktu przecięcia prostych k_1 i k_2. Ten ostatni punkt, jak wcześniej stwierdziliśmy, leży na symetralnej odcinka AB. Ponieważ wektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{IF}$ jest równoległy do tej symetralnej, więc leży na niej także punkt Z przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_2.

W ten sam sposób dowodzimy, że proste ℓ_2 i ℓ_3 przecinają się w punkcie X leżącym na symetralnej odcinka BC, zaś proste ℓ_3 i ℓ_1 przecinają się w punkcie Y leżącym na symetralnej odcinka CA (rys. 2).

Oznaczmy teraz przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt Z leży na symetralnej odcinka AB i w takim razie $OZ \perp AB$. A skoro również $YZ \perp AI$, więc ramiona kąta OZY są prostopadłe do ramion kąta BAI, skąd wynika, że

$$\sphericalangle OZY = \sphericalangle BAI \qquad \text{lub} \qquad \sphericalangle OZY + \sphericalangle BAI = 180^\circ.$$

Podobnie dowodzimy, że

$$\sphericalangle OYZ = \sphericalangle CAI \qquad \text{lub} \qquad \sphericalangle OYZ + \sphericalangle CAI = 180^\circ.$$

Kąt $\sphericalangle BAI = \sphericalangle CAI = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ jest ostry, więc gdyby w co najmniej jednej z powyższych alternatyw spełniony był drugi człon, to otrzymalibyśmy $\sphericalangle OZY + \sphericalangle OYZ \geqslant 180^\circ$. W trójkącie OYZ taka nierówność jest niemożliwa (trójkąt ten jest niezdegenerowany, gdyż proste OY i OZ są symetralnymi odcinków AC i AB). Wobec tego w obu alternatywach spełniony jest pierwszy człon, a stąd $\sphericalangle OZY = \sphericalangle OYZ = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ i w efekcie $OY = OZ$.

Analogicznie uzasadniamy, że $OX = OY$. To dowodzi, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie XYZ, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **3.** Dla każdej liczby nieparzystej $n \geqslant 3$ wyznaczyć liczbę rzeczywistych rozwiązań $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ układu równań

$$\begin{cases} x_1(x_1+1) = x_2(x_2-1) \\ x_2(x_2+1) = x_3(x_3-1) \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}(x_{n-1}+1) = x_n(x_n-1) \\ x_n(x_n+1) = x_1(x_1-1) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Przekształcając równoważnie zależność $x(x+1) = y(y-1)$ otrzymujemy $y+x = y^2-x^2 = (y+x)(y-x)$, skąd $y+x=0$ lub $y-x=1$, czyli $y \in \{-x, x+1\}$. Należy zatem znaleźć liczbę ciągów $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w których $x_0 = x_n$ oraz

(1) $$x_{i+1} \in \{-x_i, x_i+1\} \qquad \text{dla } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Każda liczba rzeczywista x_0 oraz *ciąg sterujący* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, w którym $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, wyznaczają następujący ciąg $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$x_i = \begin{cases} x_{i-1}+1, & \text{gdy } \varepsilon_i = 0 \\ -x_{i-1}, & \text{gdy } \varepsilon_i = 1 \end{cases} \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Taki ciąg spełnia warunki (1), ale nie musi zachodzić równość $x_0 = x_n$. Odwrotnie, każdy ciąg spełniający warunki (1) powstaje w opisany wyżej sposób.

Rozpatrzmy ciąg $(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ powstający w taki sposób od wartości początkowej $c_0 = 0$ i tego samego ciągu sterującego $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Mamy więc

$$c_i = \begin{cases} c_{i-1} + 1, & \text{gdy } \varepsilon_i = 0 \\ -c_{i-1}, & \text{gdy } \varepsilon_i = 1 \end{cases} \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Udowodnimy teraz przez indukcję ze względu na i, że

$$x_i = (-1)^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i} x_0 + c_i \qquad \text{dla } i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Dla $i=0$ powyższa równość ma postać $x_0 = x_0$. Przyjmując zaś, że równość (2) jest prawdziwa dla pewnego $i = j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, otrzymujemy

$$x_{j+1} = x_j + 1 = (-1)^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j} x_0 + c_j + 1 = (-1)^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}} x_0 + c_{j+1},$$

gdy $\varepsilon_{j+1} = 0$, albo

$$x_{j+1} = -x_j = -[(-1)^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j} x_0 + c_j] = (-1)^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}} x_0 + c_{j+1},$$

gdy $\varepsilon_{j+1} = 1$, co kończy indukcję. Podstawiając $i = n$ w związku (2) dostajemy

$$x_n = (-1)^s x_0 + c_n, \qquad \text{gdzie } s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n. \tag{3}$$

Zauważmy też, że dla $i = 1, 2, \ldots, n$ sąsiednie wyrazy c_{i-1} oraz c_i mają jednakową parzystość wtedy i tylko wtedy, gdy $\varepsilon_i = 1$, co ma miejsce dla dokładnie s różnych wartości wskaźnika i. Ponieważ $c_0 = 0$, więc liczba c_n ma taką samą parzystość jak liczba $n - s$, czyli inną niż liczba s.

Jeżeli s jest liczbą parzystą, to w myśl wzoru (3) równanie $x_0 = x_n$ ma postać $x_0 = x_0 + c_n$. Jednakże w tej sytuacji liczba c_n jest nieparzysta, a więc różna od zera i rozważane równanie nie ma rozwiązań.

Jeżeli zaś s jest liczbą nieparzystą, to równanie $x_0 = x_n$ przybiera postać $x_0 = -x_0 + c_n$, gdzie liczba c_n jest parzysta — ma ono zatem dokładnie jedno rozwiązanie, będące ponadto liczbą całkowitą. Wobec tego dla każdego ciągu sterującego $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, w którym suma $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$ jest nieparzysta, istnieje dokładnie jeden ciąg $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w którym $x_0 = x_n$ oraz zachodzą warunki (1). Wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

Pozostaje rozstrzygnąć, czy różne ciągi sterujące mogą wyznaczać to samo rozwiązanie $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Przypuśćmy, że dzieje się tak dla ciągów $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ oraz $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n)$. Niech $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ będzie najmniejszym wskaźnikiem, dla którego $\varepsilon_k \neq \varepsilon'_k$. Wówczas $x_k = x_{k-1} + 1$ i jednocześnie $x_k = -x_{k-1}$, skąd $x_{k-1} + 1 = -x_{k-1}$, czyli $x_{k-1} = -\frac{1}{2}$. Jest to sprzeczne ze spostrzeżeniem, że wszystkie liczby x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n są całkowite.

Ostatecznie liczba rozwiązań danego w treści zadania układu jest równa liczbie tych ciągów sterujących, w których suma wyrazów jest nieparzysta. Ponieważ przyporządkowanie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \mapsto (1 - \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2, \ldots, 1 - \varepsilon_n)$ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między ciągami sterującymi o sumie nieparzystej oraz ciągami o sumie parzystej, więc poszukiwana liczba jest połową liczby *wszystkich* ciągów sterujących, których jest oczywiście 2^n.

Odpowiedź: Dany układ ma 2^{n-1} rozwiązań.

LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2011 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Wyznaczyć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x)f(y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y). \tag{1}$$

Rozwiązanie

Określmy funkcję h wzorem

$$h(t) = g(t) + 1 \qquad \text{dla każdego } t;$$

wówczas

$$g(x)g(y) + g(x) + g(y) = (g(x)+1)(g(y)+1) - 1 = h(x)h(y) - 1,$$

a więc warunek (1) możemy przepisać w równoważnej postaci

$$f(x)f(y) + 1 = h(x)h(y) \qquad \text{dla dowolnych } x, y. \tag{2}$$

Podstawiając $x = y$ wnioskujemy z równania (2), że

$$f(x)^2 + 1 = h(x)^2 \qquad \text{dla wszystkich } x.$$

Wobec tego podnosząc obustronnie zależność (2) do kwadratu dostajemy

$$(f(x)f(y)+1)^2 = h(x)^2 h(y)^2 = (f(x)^2+1)(f(y)^2+1),$$

skąd po wymnożeniu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy

$$2f(x)f(y) = f(x)^2 + f(y)^2,$$

czyli $(f(x) - f(y))^2 = 0$. Tak więc $f(x) = f(y)$, ale liczby x i y wybraliśmy dowolnie, zatem f musi być funkcją stałą. W takim razie związek (2) wskazuje, że również h jest funkcją stałą. Istotnie, jeśli h nie jest funkcją zerową, to $h(a) \neq 0$ dla pewnego a. Podstawmy $y = a$ w zależności (2), uzyskując

$$h(x) = \frac{f(x)f(a)+1}{h(a)} = \frac{f(a)^2+1}{h(a)}$$

dla każdego x. W rezultacie funkcja h — i tym samym także g — jest stała.

Pozostaje więc wyznaczyć pary funkcji stałych spełniające warunki zadania. Jeśli $f(x) \equiv C$ i $g(x) \equiv D$, to warunek (2), równoważny danemu w treści zadania warunkowi (1), przybiera postać

$$C^2 + 1 = (D+1)^2. \tag{3}$$

Zatem para funkcji stałych ma żądaną własność wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwa jest zależność (3).

Odpowiedź: Rozwiązaniami są pary funkcji stałych $f(x) \equiv C$, $g(x) \equiv D$, gdzie stałe C i D są związane równością $C^2 + 1 = (D+1)^2$.

Zadanie **5.** Wysokości czworościanu $ABCD$ przecinają się w punkcie H leżącym wewnątrz czworościanu. Prosta DH przecina ścianę ABC w punkcie P, a sferę opisaną na danym czworościanie w punkcie Q różnym od D. Udowodnić, że $PQ = 2HP$.

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw następujące dwa stwierdzenia:

1. Jeżeli wysokości trójkąta XYZ przecinają się w punkcie T leżącym wewnątrz trójkąta, a prosta XT przecina bok YZ w punkcie V oraz okrąg opisany na danym trójkącie w punkcie W różnym od X, to $TV = VW$.

(Zauważmy, iż jest to „płaska” wersja zadania.)

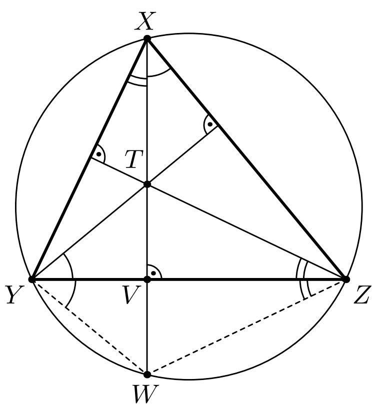
2. Dla dowolnych dwóch wierzchołków danego czworościanu płaszczyzna zawierająca te dwa wierzchołki oraz punkt H jest prostopadła do krawędzi wyznaczonej przez dwa pozostałe wierzchołki.

Dowód zdania **1.** Ponieważ (rys. 3)

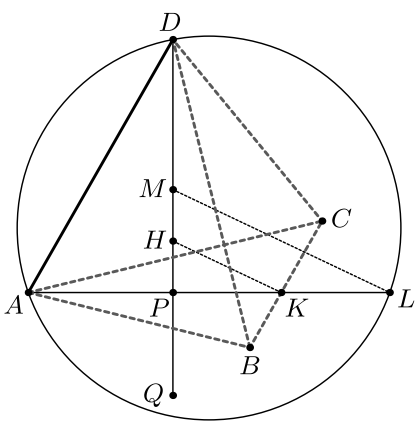
$$\sphericalangle WYZ = \sphericalangle WXZ = 90^\circ - \sphericalangle XZY = \sphericalangle TYZ$$

i podobnie $\sphericalangle WZY = \sphericalangle TZY$, więc trójkąty YWZ i YTZ są symetryczne względem prostej YZ, skąd od razu uzyskujemy żądaną równość.

Dowód zdania **2.** Wykażemy, że płaszczyzna AHB jest prostopadła do krawędzi CD; rozumowanie dla innych par wierzchołków jest analogiczne. Prosta AH jest prostopadła do ściany BCD, a zatem także do zawartej w niej krawędzi CD. Podobnie prosta BH jest prostopadła do krawędzi CD. W takim razie dwie nierównoległe proste zawarte w płaszczyźnie AHB są prostopadłe do krawędzi CD, czyli prostopadła do niej jest cała płaszczyzna.



rys. 3



rys. 4

Przechodzimy do rozwiązania zadania.

Niech prosta AP przecina krawędź BC w punkcie K, a sferę opisaną na czworościanie w punkcie L różnym od A (rys. 4). Niech ponadto M oznacza punkt przecięcia wysokości trójkąta ALD.

Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie P — rzeczywiście, w myśl zdania **2.** płaszczyzna AHD jest prostopadła do krawędzi BC, zatem prosta AP zawarta w tej płaszczyźnie jest prostopadła do krawędzi BC, i analogicznie proste BP oraz CP zawierają wysokości trójkąta ABC.

W oparciu o zdanie **2.** stwierdzamy, że prosta HK zawarta w płaszczyźnie BHC jest prostopadła do krawędzi AD. Prostopadła do niej jest też oczywiście prosta LM zawierająca wysokość trójkąta ALD. Ponieważ trzy proste HK, ML i AD leżą w jednej płaszczyźnie ALD, więc z prostopadłości $HK \perp AD$ i $ML \perp AD$ wynika równoległość prostych HK i ML.

Na mocy zdania **1.** odpowiednio dla trójkątów ALD i ABC otrzymujemy

$$MP = PQ \qquad \text{oraz} \qquad PK = KL.$$

Druga z tych równości, w połączeniu z twierdzeniem Talesa zastosowanym do kąta DPL przeciętego prostymi równoległymi HK i ML, prowadzi do związku $MH = HP$. Zatem z pierwszej równości dostajemy $PQ = MP = 2HP$, czyli tezę zadania.

Zadanie **6.** Dowieść, że nie istnieją takie wielomiany $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ o współczynnikach wymiernych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$x^2 + 7 = (f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 + (f_3(x))^2 + (f_4(x))^2. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że takie wielomiany $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ istnieją. Zauważmy najpierw, że są to wielomiany stopnia co najwyżej pierwszego. Jeżeli bowiem d jest największym ze stopni tych czterech wielomianów, to wielomian stojący po prawej stronie równości (1) ma przy potędze x^{2d} współczynnik będący sumą kwadratów liczb rzeczywistych, nie wszystkich równych zeru, a więc współczynnik dodatni. Stąd $d = 1$.

Istnieją zatem takie liczby całkowite a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 oraz $m \neq 0$, że

$$f_i(x) = \frac{a_i x + b_i}{m} \qquad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4. \tag{2}$$

Zależność (1) przybiera w związku z tym postać

$$m^2(x^2 + 7) = (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + (a_3 x + b_3)^2 + (a_4 x + b_4)^2$$

i porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej dostajemy

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = m^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 7m^2 \end{cases}.$$

Wprowadźmy oznaczenia $c_i = a_i + b_i$ oraz $d_i = b_i - a_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4$; wówczas z napisanego przed chwilą układu równości możemy wywnioskować, że

$$(3)\qquad \begin{cases} c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2=8m^2 \\ c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3+c_4d_4=6m^2 \\ d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=8m^2 \end{cases}.$$

Ponieważ $m \neq 0$, zaś równości (3) pozostaną prawdziwe, jeżeli liczby c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4, m podzielimy przez 2, więc wykonując w razie potrzeby skończoną liczbę takich dzieleń możemy przyjąć, iż nie wszystkie spośród tych liczb całkowitych są parzyste.

Zauważmy teraz, że kwadrat liczby parzystej daje resztę 0 lub 4 z dzielenia przez 8, natomiast kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1 z dzielenia przez 8, gdyż $(2k+1)^2=4k(k+1)+1$, a liczba $k(k+1)$ jest parzysta dla dowolnej całkowitej wartości k. Z tego spostrzeżenia dotyczącego reszt wynika, że suma czterech kwadratów liczb całkowitych może być podzielna przez 8 jedynie wtedy, gdy wszystkie te cztery liczby są parzyste. W rezultacie pierwsze i trzecie z równań (3) wskazują, że liczby c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4 są parzyste. Biorąc to pod uwagę stwierdzamy na mocy drugiego z równań (3), że liczba $6m^2$ jest podzielna przez 4 i skutkiem tego również liczba m jest parzysta. Przeczy to jednak poczynionemu wcześniej założeniu.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że rozpatrywana teza jest prawdziwa.