LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(1 września 2011 r. – 6 grudnia 2011 r.)

Zadanie **1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 8z \\ (y+z)^3 = 8x \\ (z+x)^3 = 8y \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmując drugie równanie układu od pierwszego oraz stosując wzór na różnicę sześcianów otrzymujemy

$$\begin{aligned} 8(z-x) &= (x+y)^3 - (y+z)^3 = \\ &= [(x+y)-(y+z)][(x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2] = \\ &= (x-z)[(x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2], \end{aligned}$$

czyli

$$(x-z)[(x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2 + 8] = 0.$$

Wobec tego

$$x = z \qquad \text{lub} \qquad (x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2 + 8 = 0.$$

Druga z powyższych równości zachodzić jednak nie może, gdyż oznaczając $a = x+y$ i $b = y+z$ mamy

$$(x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2 + 8 = a^2 + ab + b^2 + 8 = (a + \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{3}{4}b^2 + 8 \geqslant 8.$$

W takim razie $x = z$. Postępując analogicznie z drugim i trzecim równaniem danego układu dochodzimy do wniosku, że $y = x$.

Zatem wszystkie trzy niewiadome muszą być równe: $x = y = z = t$, a cały układ równań przybiera postać $(2t)^3 = 8t$, lub równoważnie $t^3 = t$. Dostajemy stąd trzy możliwe wartości t, którymi są: 0, 1 oraz -1.

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x,y,z) danego układu równań są:

$$(0,0,0), \quad (1,1,1), \quad (-1,-1,-1).$$

Zadanie **2.** Znaleźć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y), że liczba $2^x + 5^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że $2^x + 5^y = k^2$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Liczby k^2 i 2^x dają te same reszty z dzielenia przez 5. Kwadrat liczby całkowitej może dawać tylko resztę 0, 1 lub 4 z dzielenia przez 5, gdyż

$$(5n)^2 = 5 \cdot 5n^2, \quad (5n \pm 1)^2 = 5(5n^2 \pm 2n) + 1, \quad (5n \pm 2)^2 = 5(5n^2 \pm 4n) + 4$$

dla dowolnej liczby całkowitej n, a każdą liczbę całkowitą można przedstawić w postaci $5n$, $5n\pm 1$ lub $5n\pm 2$ dla pewnego n.

Wykażemy z kolei, że reszta z dzielenia liczby 2^x przez 5 jest zależna od reszty z dzielenia liczby x przez 4. Niech bowiem $x=4m+r$, gdzie m jest liczbą całkowitą oraz $r\in\{0,1,2,3\}$. Wówczas $2^x=2^{4m+r}=(2^4)^m\cdot 2^r=(3\cdot 5+1)^m\cdot 2^r$. Wymnażając nawiasy w wyrażeniu $(3\cdot 5+1)^m$ możemy je zapisać w postaci sumy składników podzielnych przez 5 oraz liczby 1. Stąd wynika, że liczby 2^x i 2^r dają jednakowe reszty z dzielenia przez 5. Reszty te dla $r=0,1,2,3$ są odpowiednio równe $1,2,4,3$. Zatem resztę, którą jednocześnie może dawać liczba k^2, otrzymujemy tylko dla $r=0$ oraz $r=2$, czyli gdy x jest liczbą parzystą.

Wobec tego $x=2z$, gdzie z jest dodatnią liczbą całkowitą. Ponadto

$$5^y=k^2-2^x=k^2-(2^z)^2=(k-2^z)(k+2^z).$$

W takim razie liczby $k-2^z$ i $k+2^z$ są dzielnikami potęgi piątki, czyli

$$k-2^z=5^\alpha \qquad \text{oraz} \qquad k+2^z=5^\beta,$$

gdzie α, β są liczbami całkowitymi spełniającymi warunki $0\leqslant\alpha<\beta$ i $\alpha+\beta=y$. Gdyby $\alpha>0$, to liczba $5^\beta-5^\alpha=2\cdot 2^z=2^{z+1}$ byłaby podzielna przez 5, co nie jest możliwe. Stąd $\alpha=0$, czyli $k-2^z=1$ oraz $k+2^z=5^y$. W rezultacie

$$5^y=k+2^z=(k-2^z)+2^{z+1}=1+2^{z+1}.$$

Jeżeli teraz $z>1$, to liczba $5^y=1+2^{z+1}$ daje resztę 1 z dzielenia przez $2^3=8$. To pociąga za sobą parzystość liczby y — dla nieparzystej wartości $y=2s+1$ liczba $5^y=25^s\cdot 5=5(3\cdot 8+1)^s$ daje bowiem resztę 5 z dzielenia przez 8 (co uzasadniamy tak jak dla rozpatrywanej wcześniej liczby $(3\cdot 5+1)^m$). Ale skoro $y=2t$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej t, to

$$2^{z+1}=5^y-1=(5^t)^2-1=(5^t-1)(5^t+1),$$

czyli liczby 5^t-1 oraz 5^t+1 są potęgami dwójki o nieujemnych całkowitych wykładnikach, różniącymi się o 2. Tak więc $5^t-1=2$ i $5^t+1=4$, co prowadzi do niedorzecznej równości $5^t=3$.

Zatem $z=1$, czyli $x=2$ oraz $5^y=1+2^{z+1}=1+2^2=5$, skąd $y=1$. Uzyskana para $(x,y)=(2,1)$ oczywiście spełnia warunki zadania: $2^2+5^1=9=3^2$.

Odpowiedź: Jedyną parą o żądanych własnościach jest $(x,y)=(2,1)$.

Zadanie **3.** W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $AE=AD$ i $BF=BD$. Punkt S jest symetryczny do punktu C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $SE=SF$.

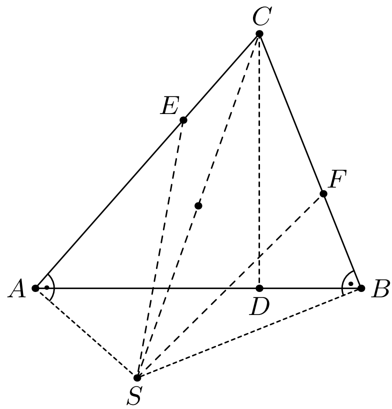
Rozwiązanie

Odcinek CS jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, więc $\sphericalangle SAC=\sphericalangle SBC=90^\circ$ (rys. 1). Zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów SAC i SBC otrzymujemy

$$AS^2+AC^2=CS^2=BS^2+BC^2. \tag{1}$$

Z kolei rozpatrując trójkąty prostokątne CDA i CDB dostajemy

$$AC^2-AD^2=CD^2=BC^2-BD^2. \tag{2}$$



rys. 1

Łącząc zależności (1) i (2) stwierdzamy, że

$$AS^2-BS^2=BC^2-AC^2=BD^2-AD^2. \tag{3}$$

Na mocy danych w treści zadania równości $AE=AD$ i $BF=BD$ możemy przepisać związek (3) w postaci

$$AS^2-BS^2=BF^2-AE^2,$$

skąd w myśl twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów SAE i SBF uzyskujemy

$$SE^2=AS^2+AE^2=BS^2+BF^2=SF^2,$$

a więc $SE=SF$, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **4.** Dana jest liczba całkowita $n\geqslant 1$. Dla niepustego podzbioru X zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ niech a i b oznaczają odpowiednio najmniejszy i największy element zbioru X oraz niech

$$f(X)=\frac{1}{n-(b-a)}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n, sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich niepustych podzbiorów X zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolną parę liczb $a\leqslant b$ ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Obliczymy sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich podzbiorów X, których najmniejszy i największy element są odpowiednio równe a i b. Jeżeli $a=b$, to X jest zbiorem jednoelementowym oraz $f(X)=\frac{1}{n}$. Suma liczb $f(X)$ dla wszystkich jednoelementowych zbiorów X wynosi w takim razie 1. Przyjmijmy dalej, że $a<b$.

Dowolny podzbiór X, którego najmniejszy i największy element są odpowiednio równe a i b, można zapisać w postaci

$$X=\{a,b\}\cup Y,$$

gdzie Y jest dowolnym podzbiorem zbioru $Y_{a,b}$, złożonego z liczb całkowitych większych od a i mniejszych od b.

Zbiór $Y_{a,b}$ ma $b-a-1$ elementów, a więc 2^{b-a-1} podzbiorów. Stąd wniosek, że suma liczb $f(X)$ dla wszystkich podzbiorów X o najmniejszym elemencie a i największym elemencie b wynosi

$$s_{a,b}=\frac{1}{n-(b-a)}\cdot 2^{b-a-1}.$$

Poszukiwana w zadaniu wielkość jest o 1 większa od sumy liczb $s_{a,b}$ uzyskanych dla wszystkich par $a<b$ liczb ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Dla każdego $r\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ istnieje dokładnie $n-r$ par, w których $b-a=r$: są to mianowicie pary $(a,b)=(1,r+1),(2,r+2),(3,r+3),\ldots,(n-r,n)$. Dla każdej z tych par liczba $s_{a,b}$ jest taka sama i wynosi

$$\frac{1}{n-r}\cdot 2^{r-1},$$

czyli suma tych $n-r$ liczb $s_{a,b}$ jest równa 2^{r-1}. Wobec tego suma wszystkich liczb $s_{a,b}$ jest równa sumie liczb 2^{r-1} dla $r=1,2,\ldots,n-1$, a szukana suma wszystkich liczb $f(X)$ wynosi

$$1+2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-2}=\mathbf{2^{n-1}}.$$

Zadanie **5.** Znaleźć wszystkie takie ciągi $(a_1,a_2,\ldots,a_{63})$ złożone z różnych dodatnich liczb całkowitych, że dla $i=1,2,\ldots,62$ liczba a_i jest dzielnikiem liczby $1+a_{i+1}$, zaś liczba a_{63} jest dzielnikiem liczby $1+a_1$.

Rozwiązanie

Będziemy szukać ciągów spełniających warunki zadania, w których a_1 jest największym wyrazem. Pozostałe ciągi otrzymamy wówczas w wyniku cyklicznego przestawienia wyrazów.

Niech więc $(a_1,a_2,\ldots,a_{63})$ będzie ciągiem o żądanej własności, przy czym pierwszy wyraz jest większy od wszystkich pozostałych. Udowodnimy indukcyjnie, że

(1) $$a_i=a_1+1-i \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,63.$$

Dla $i=1$ równość (1) jest oczywiście prawdziwa. Przypuśćmy z kolei, że jest ona prawdziwa dla wskaźników $i=1,2,\ldots,j$, gdzie $j\in\{1,2,\ldots,62\}$; wykażemy jej słuszność dla $i=j+1$. Na mocy założeń zadania liczba a_j jest dzielnikiem liczby $1+a_{j+1}$, skąd $a_j\leqslant 1+a_{j+1}$ i w takim razie

(2) $$a_{j+1}\geqslant a_j-1=a_1-j.$$

Jednak liczby a_1, a_2, ..., a_j są odpowiednio równe a_1, a_1-1, ..., a_1-j+1. A skoro wyrazy rozważanego ciągu są różnymi liczbami całkowitymi, więc zależność (2) oznacza, że $a_{j+1}=a_1-j$ albo $a_{j+1}>a_1$. To drugie nie jest możliwe, gdyż a_1 jest największym wyrazem ciągu. Wobec tego $a_{j+1}=a_1-j$. W ten sposób uzyskaliśmy równość (1) dla $i=j+1$, co kończy indukcję.

Na odwrót: w dowolnym ciągu zadanym wzorem (1) dla $i=1,2,\ldots,62$ liczba a_i jest równa liczbie $1+a_{i+1}$ i tym bardziej jest jej dzielnikiem.

Ponadto dodatni wyraz $a_{63}=a_1-62$ jest dzielnikiem liczby $1+a_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest dzielnikiem liczby $1+a_1-(a_1-62)=63$. To zaś ma miejsce, gdy $a_1-62\in\{1,3,7,9,21,63\}$, czyli gdy $a_1\in\{63,65,69,71,83,125\}$.

Pozostaje wykonać cykliczne permutacje otrzymanych powyżej 6 ciągów, aby otrzymać wszystkie rozwiązania.

Odpowiedź: Rozwiązaniami zadania są poniższe ciągi oraz ich cykliczne przestawienia:

$$(63,62,61,\ldots,1),\quad (65,64,63,\ldots,3),\quad (69,68,67,\ldots,7),$$
$$(71,70,69,\ldots,9),\quad (83,82,81,\ldots,21),\quad (125,124,123,\ldots,63).$$

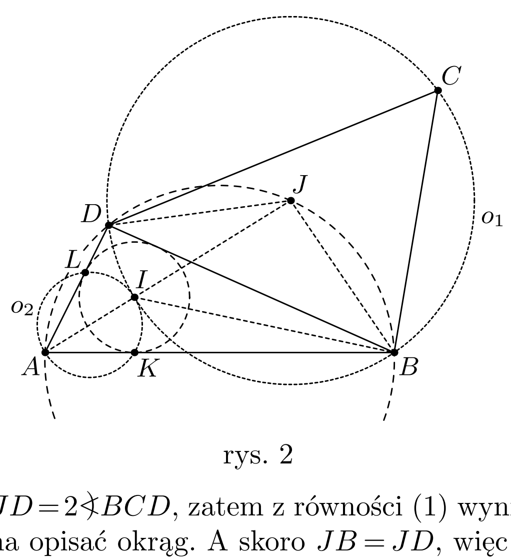
Zadanie **6.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość

(1) $$\sphericalangle DAB+2\sphericalangle BCD=180^\circ.$$

Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boków AB i AD odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach AKL i BCD są styczne.

Rozwiązanie

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABD oraz niech J oznacza środek okręgu o_1 opisanego na trójkącie BCD (rys. 2).



rys. 2

Wówczas $\sphericalangle BJD=2\sphericalangle BCD$, zatem z równości (1) wynika, że na czworokącie $ABJD$ można opisać okrąg. A skoro $JB=JD$, więc $\sphericalangle BAJ=\sphericalangle JAD$, czyli punkt J leży na dwusiecznej kąta DAB.

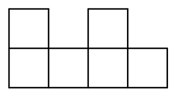
Zauważmy następnie, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle BIJ = 180^\circ - \sphericalangle AIB = \sphericalangle IAB + \sphericalangle IBA = \\ = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BDA)\end{aligned}$$

oraz $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BJA$. Stąd wniosek, że trójkąt BIJ jest równoramienny: $JB = JI$. W takim razie punkt I leży na okręgu o_1.

Ponadto odcinek AI jest średnicą okręgu o_2 opisanego na trójkącie AKL, gdyż $\sphericalangle IKA = \sphericalangle ILA = 90^\circ$. Wobec tego okręgi o_1 i o_2 mają punkt wspólny I, a przy tym środki tych okręgów oraz punkt I leżą na jednej prostej — dwusiecznej kąta DAB. To zaś oznacza, że okręgi o_1 i o_2 są styczne w punkcie I.

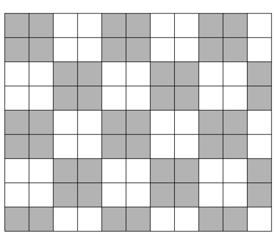
Zadanie **7.** Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m,n), dla których prostokąt o wymiarach $m \times n$ można zbudować z następujących klocków utworzonych z 6 kwadratów jednostkowych:



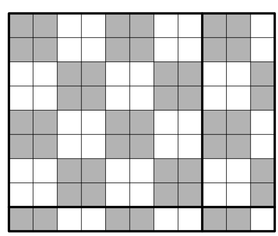
Klocki wolno obracać i odwracać na drugą stronę.

Rozwiązanie

Podzielmy dany prostokąt $m \times n$ na kwadraty 2×2, rozpoczynając od lewego górnego rogu. Jeśli przynajmniej jedna z liczb m, n jest nieparzysta, to przy prawym lub dolnym brzegu zamiast kwadratów umieszczamy prostokąty 1×2, a w prawym dolnym rogu w razie potrzeby umieszczamy kwadrat jednostkowy (rys. 3). Następnie pomalujmy otrzymane kwadraty i prostokąty na biało i czarno tak, aby dwie figury o wspólnym boku miały różne kolory, a kwadrat w lewym górnym rogu był czarny. Na koniec podzielmy wszystkie te figury na kwadraty jednostkowe, które będziemy krótko nazywać polami.



rys. 3



rys. 4

Zauważmy teraz, że dowolny klocek zawsze pokrywa 3 pola białe oraz 3 pola czarne: rzeczywiście, dowolny prostokąt 1×4 pokrywa dwa pola białe oraz dwa czarne, natomiast dowolna para kwadratów jednostkowych leżących w linii pionowej lub poziomej i oddzielona jednym polem pokrywa jedno pole białe i jedno czarne. Wobec tego jeżeli prostokąt $m \times n$ można zbudować z klocków, to znajduje się w nim tyle samo pól białych i czarnych.

Z drugiej strony, podzielmy liczby m i n przez 4, otrzymując odpowiednio ilorazy q_m i q_n oraz reszty r_m i r_n. Mamy więc

$$m = 4q_m + r_m \quad \text{oraz} \quad n = 4q_n + r_n, \qquad \text{gdzie } r_m, r_n \in \{0,1,2,3\}.$$

Prostokąt $m \times n$ możemy podzielić na prostokąty: $4q_m \times 4q_n$ przyległy do lewego górnego rogu, $4q_m \times r_n$, $r_m \times 4q_n$ oraz $r_m \times r_n$ (rys. 4; niektóre z tych prostokątów mogą nie występować, gdy którąś z liczb m, n jest podzielna przez 4). Każdy z prostokątów $4q_m \times 4q_n$, $4q_m \times r_n$, $r_m \times 4q_n$ daje się podzielić na prostokąty 1×4 i w związku z tym zawiera tyle samo pól białych i czarnych. Zbadajmy teraz, kiedy prostokąt $r_m \times r_n$ — o ile istnieje — zawiera tyle samo pól białych i czarnych. Liczba pól takiego prostokąta musi być parzysta, czyli ma on wymiary 1×2, 2×1, 2×2, 3×2 lub 2×3. Jednak trzy pierwsze prostokąty składają się wyłącznie z czarnych pól, a ostatnie dwa zawierają czarny kwadrat 2×2 w lewym górnym rogu (korzystamy tu z faktu, że do lewego górnego rogu wyjściowego prostokąta $m \times n$ przylega czarny kwadrat 2×2). Tak więc jeśli $r_m \geqslant 1$ i $r_n \geqslant 1$, to w prostokącie $r_m \times r_n$ liczby pól białych i czarnych są różne. W rezultacie liczba pól białych w prostokącie $m \times n$ nie jest równa liczbie pól czarnych, gdy liczby m i n nie są podzielne przez 4.

Zatem jeżeli para (m,n) ma postulowaną w zadaniu własność, to jedna z liczb m, n musi być podzielna przez 4. Ponadto oczywiście jedna z nich musi być podzielna przez 3, gdyż każdy klocek pokrywa liczbę pól podzielną przez 3. W takim razie mamy dwie możliwości:

1. Jedna z liczb m, n jest podzielna przez 4, a druga — przez 3.

2. Jedna z liczb m, n jest podzielna przez 12.

W przypadku **1** prostokąt $m \times n$ można podzielić na prostokąty 4×3, z których każdy daje się ułożyć z dwóch klocków. Wszystkie takie pary (m,n) spełniają więc warunki zadania.

Przejdźmy z kolei do przypadku **2**; możemy przyjąć, że dany w zadaniu prostokąt ma wówczas wymiary $12m' \times n$, gdzie m', n są dodatnimi liczbami całkowitymi. Przypuśćmy, że liczbę n można zapisać w postaci

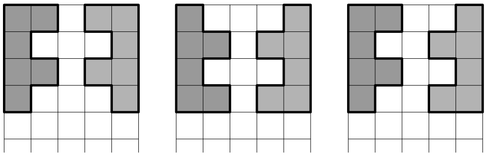
$$n = 3k + 4\ell, \tag{1}$$

gdzie k, ℓ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Wtedy rozważany prostokąt można podzielić na k prostokątów 12×3 oraz ℓ prostokątów 12×4. Każdy z takich prostokątów można rozbić na prostokąty 4×3, które — jak wiemy — składają się z dwóch klocków.

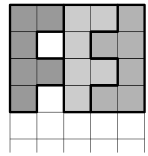
Przedstawienie w postaci (1) istnieje dla liczb $n = 3, 4$ oraz dla wszystkich liczb $n \geqslant 6$: mamy

$$6 + 3t = 3 \cdot (t+2) + 4 \cdot 0, \quad 7 + 3t = 3 \cdot (t+1) + 4 \cdot 1, \quad 8 + 3t = 3 \cdot t + 4 \cdot 2$$

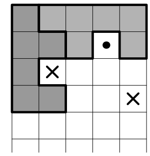
dla każdej liczby całkowitej $t \geqslant 0$. To dowodzi, że pary $(m,n) = (12m', n)$, w których $n \notin \{1,2,5\}$, spełniają warunki zadania. Pozostaje jeszcze zbadać przypadki $n = 1, 2, 5$.



rys. 5



rys. 6



rys. 7

Prostokątów $12m' \times 1$ i $12m' \times 2$ oczywiście nie da się zbudować z klocków. Wykażemy, iż jest to niemożliwe również dla prostokątów $12m' \times 5$. Rozważmy bowiem dwa rogi takiego prostokąta będące końcami boku o długości 5 oraz dwa klocki przylegle do takich rogów. Gdyby te dwa klocki nie pokrywały całego boku (rys. 5), to po umieszczeniu trzeciego klocka przyległego do brakującej części boku pozostałoby jedno puste pole otoczone ze wszystkich stron klockami (rys. 6). Zatem te dwa narożne klocki muszą pokrywać cały bok (rys. 7); wtedy jednak pokrycie pola oznaczonego kropką na rys. 7 sprawia, że jedno z pól oznaczonych krzyżykiem zostanie otoczone klockami. Zbudowanie z klocków prostokąta o wymiarach $12m' \times 5$ nie jest więc możliwe.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają pary (m,n), w których jedna z liczb jest podzielna przez 3, a druga przez 4, oraz pary, w których jedna z liczb jest podzielna przez 12, a druga jest różna od 1, 2 i 5.

Zadanie **8.** Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x+f(x+y)) = f(x-y) + f(x)^2. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Niech $c = f(0)$. Podstawmy $x = c$ i $y = -c$ w równaniu (1); otrzymamy $f(2c) = f(2c) + f(c)^2$, skąd

$$f(c) = 0. \tag{2}$$

Przyjmijmy z kolei $x = \frac{1}{2}(c+t)$ oraz $y = \frac{1}{2}(c-t)$ w zależności (1), gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas $x+y=c$ i $x-y=t$, a więc uwzględniając równość (2) uzyskujemy $f(x) = f(t) + f(x)^2$ i wobec tego

$$f(t) = f(x) - f(x)^2 = \tfrac{1}{4} - (\tfrac{1}{2} - f(x))^2 \leqslant \tfrac{1}{4} \tag{3}$$

dla każdego t.

Podstawmy teraz w (1) wartości $x = y = 0$. Dostajemy $f(c) = c + c^2$ i na podstawie związku (2) wnioskujemy, że $c = 0$ lub $c = -1$. Załóżmy, że $c = -1$. Wówczas przyjmując $x = 0$ i $y = 1$ w warunku (1) stwierdzamy w oparciu o (2), że $f(f(1)) = f(-1) + f(0)^2 = f(c) + c^2 = 1$. To przeczy nierówności (3) dla $t = f(1)$ i wobec tego

$$c = f(0) = 0. \tag{4}$$

Przypuśćmy, że istnieje liczba rzeczywista b, dla której $f(b)\neq 0$. Niech $x_0=b+f(2b)$; podstawiając $x=y=b$ w równaniu (1) i stosując zależność (4) uzyskujemy $f(x_0)=f(b)^2>0$. Określmy ciągi $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oraz $y_0, y_1, y_2, \ldots$ w następujący sposób:

$$x_{n+1}=x_n+f(x_n) \quad \text{oraz} \quad y_n=f(x_n) \qquad \text{dla } n=0,1,2,\ldots.$$

Wówczas dla każdego n podstawiając $x=x_n$ i $y=0$ w warunku (1) dostajemy

$$f(x_{n+1})=f(x_n+f(x_n))=f(x_n)+f(x_n)^2,$$

czyli

$$y_{n+1}=y_n+y_n^2 \tag{5}$$

dla $n=0,1,2,\ldots$. Stąd wynika, że $y_{n+1}\geqslant y_n$ dla każdego $n\geqslant 0$ i w rezultacie $y_n^2\geqslant y_0^2$, gdyż $y_0=f(x_0)>0$. Zatem z równości (5) otrzymujemy

$$y_{n+1}\geqslant y_n+y_0^2 \qquad \text{dla } n=0,1,2,\ldots,$$

skąd wniosek, że dla dowolnego $n\geqslant 1$ mamy

$$f(x_n)=y_n=(y_n-y_{n-1})+(y_{n-1}-y_{n-2})+\ldots+(y_2-y_1)+(y_1-y_0)+y_0>ny_0^2.$$

Wybierając teraz liczbę n, dla której $ny_0^2>\frac{1}{4}$, dostajemy sprzeczność z zależnością (3).

Założenie, że funkcja f przyjmuje wartość różną od zera, okazało się fałszywe. Pozostaje zauważyć, że funkcja zerowa spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Jedyną funkcją spełniającą równanie (1) jest funkcja zerowa.

Zadanie **9.** Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n\geqslant 1$, że liczba $1+2^{n+1}+4^{n+1}$ jest podzielna przez liczbę $1+2^n+4^n$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$1+2^n+4^n<1+2^{n+1}+4^{n+1}<4+2^{n+2}+4^{n+1}=4(1+2^n+4^n).$$

Zatem jeżeli liczba $1+2^{n+1}+4^{n+1}$ jest wielokrotnością liczby $1+2^n+4^n$, to musi zachodzić jedna z równości

$$1+2^{n+1}+4^{n+1}=2(1+2^n+4^n) \qquad \text{lub} \qquad 1+2^{n+1}+4^{n+1}=3(1+2^n+4^n).$$

Pierwsza z powyższych równości nie jest jednak możliwa, gdyż jej lewa strona jest nieparzysta, prawa zaś — parzysta. Sprawdźmy z kolei, czy możliwa jest druga równość. Liczba $1+2^{n+1}+4^{n+1}$ daje resztę 1 z dzielenia przez 4 dla każdego $n\geqslant 1$. Ponadto dla $n\geqslant 2$ liczba $3(1+2^n+4^n)=3+3\cdot 2^n+3\cdot 4^n$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4. Obie liczby mogą więc być równe tylko wtedy, gdy $n=1$; bez trudu sprawdzamy, iż istotnie tak jest: $1+2^2+4^2=21=3(1+2+4)$.

Odpowiedź: Jedyną liczbą o opisanej własności jest $n=1$.

Zadanie **10.** Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 2$, że istnieje zbiór n punktów na płaszczyźnie, z których każdy leży na zewnątrz pewnego koła, zawierającego wszystkie pozostałe punkty i mającego środek w jednym z nich.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że zbiór n punktów na płaszczyźnie spełnia wymagane warunki. Wybierzmy jeden z tych punktów; oznaczmy go przez P. W myśl założeń zadania wśród pozostałych punktów istnieje taki punkt Q, że koło o środku Q i pewnym promieniu zawiera wszystkie punkty danego zbioru oprócz punktu P (jeśli jest kilka takich punktów Q, wybieramy tylko jeden z nich). Narysujmy teraz strzałkę od punktu P do punktu Q. W tej sytuacji punkt P jest najbardziej oddalonym od Q punktem rozważanego zbioru.

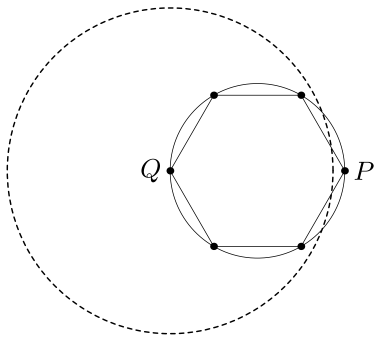
Powtarzając tę procedurę dla wszystkich n punktów narysujemy łącznie n strzałek. Z każdego punktu wychodzi dokładnie jedna strzałka. Zauważmy, że również do każdego punktu wchodzi dokładnie jedna strzałka. W przeciwnym bowiem razie — skoro liczba końców strzałek jest równa liczbie punktów — do pewnego punktu R wchodziłyby co najmniej dwie strzałki. To nie jest jednak możliwe, gdyż jeśli takie dwie strzałki wychodziłyby z różnych punktów R_1 i R_2, to na mocy spostrzeżenia z ostatniego zdania poprzedniego akapitu punkt R_1 byłby bardziej odległy od R niż punkt R_2 i jednocześnie punkt R_2 byłby bardziej odległy od R niż punkt R_1.

Wobec tego startując w dowolnym punkcie danego zbioru możemy przechodzić po strzałkach zgodnie z ich kierunkami do kolejnych punktów zbioru. W pewnym momencie powrócimy do punktu odwiedzonego już wcześniej. I to do punktu początkowego — powrót do punktu, który nie był pierwszy na tej trasie, oznaczałby bowiem, że do tego punktu wchodzą dwie różne strzałki, a wiemy, że nie jest to możliwe. Przebyta ścieżka jest więc cyklem rozpoczynającym się i kończącym w tym samym punkcie. Początkowy punkt wybraliśmy dowolnie, zatem cały układ strzałek rozpada się na takie cykle.

Przypuśćmy, że taki cykl $S_1 \to S_2 \to S_3 \to \ldots \to S_n \to S_1$ składa się z co najmniej 3 strzałek. Istnienie strzałki $S_1 \to S_2$ oznacza, że punkt S_1 jest bardziej odległy od S_2, niż dowolny inny punkt rozpatrywanego zbioru. A skoro $S_3 \neq S_1$, więc otrzymujemy nierówność $S_1S_2 > S_2S_3$. Podobnie uzasadniamy, że $S_2S_3 > S_3S_4 > \ldots > S_{n-1}S_n > S_nS_1 > S_1S_2$, czyli uzyskujemy sprzeczność. Stąd wniosek, że dowolny cykl składa się z dwóch strzałek, wzajemnie „przeciwnych” do siebie. Każdy punkt danego zbioru należy do pewnego takiego cyklu i w takim razie liczba tych punktów musi być parzysta.

Wykażemy teraz, że dla dowolnej liczby parzystej n istnieje na płaszczyźnie zbiór n punktów o żądanej własności. Dla $n = 2$ to stwierdzenie jest oczywiste — wystarczy rozważyć jakikolwiek zbiór dwóch różnych punktów.

Udowodnimy z kolei, że dla każdej liczby parzystej $n \geqslant 4$ zbiór wierzchołków n-kąta foremnego spełnia warunki zadania. Niech bowiem P będzie dowolnym wierzchołkiem n-kąta foremnego. Liczba n jest parzysta, istnieje więc wierzchołek Q (przeciwległy do wierzchołka P) o tej własności, że odcinek PQ jest średnicą okręgu zawierającego wszystkie n wierzchołków. Zatem dowolny wierzchołek różny od P znajduje się w mniejszej odległości od Q niż wierzchołek P (rys. 8). A stąd wynika, że pewne koło o środku Q zawiera wszystkie wierzchołki n-kąta z wyjątkiem P. Wobec tego rozpatrywany zbiór ma wymaganą własność.



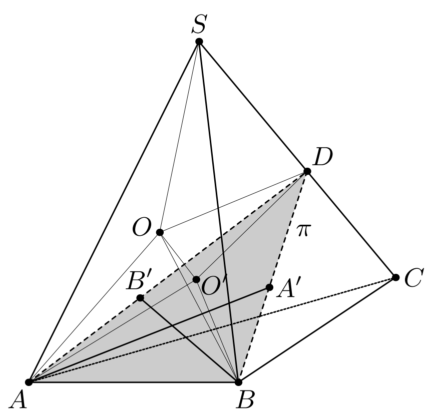
rys. 8

Odpowiedź: Szukanymi liczbami są wszystkie dodatnie liczby parzyste.

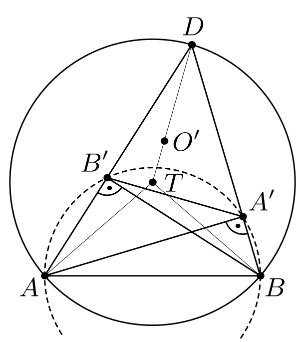
Zadanie **11.** W ostrosłupie o podstawie ABC i wierzchołku S wysokości AA', BB', CC', SS' przecinają się w jednym punkcie, leżącym wewnątrz ostrosłupa. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na danym ostrosłupie. Dowieść, że jeśli prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$, to ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

Rozwiązanie

Odcinki AA' i BB' przecinają się wewnątrz ostrosłupa, zatem leżą one na jednej płaszczyźnie π, która przecina krawędź CS w pewnym punkcie D (rys. 9).



rys. 9



rys. 10

Prosta AA' jest prostopadła do płaszczyzny BCS, a więc także do zawartej w tej płaszczyźnie prostej CS. Analogicznie uzasadniamy prostopadłość prostych BB' i CS. Zatem dwie nierównoległe proste leżące na płaszczyźnie π — proste AA' oraz BB' — są prostopadłe do prostej CS. Wynika stąd, że cała płaszczyzna π jest prostopadła do prostej CS. Oznacza to w szczególności, że rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę π jest punkt D.

Niech O' oznacza rzut prostokątny punktu O na płaszczyznę π. Na mocy założeń zadania prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$ i tym bardziej do zawartej w niej prostej $A'B'$. Wobec tego — w myśl twierdzenia o trzech prostych prostopadłych — prosta DO', będąca rzutem prostokątnym prostej SO na płaszczyznę π, jest prostopadła do prostej $A'B'$.

Ponadto punkt O jest środkiem sfery opisanej na ostrosłupie $ABCS$, więc zachodzi równość $OA = OB$ i stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych $OO'A$ oraz $OO'B$ uzyskujemy zależność $O'A = O'B$.

Dalsza część rozumowania rozgrywa się na płaszczyźnie π (rys. 10). Odcinki AA' oraz BB' są wysokościami trójkąta ABD i przecinają się w jego wnętrzu. Trójkąt ten jest zatem ostrokątny, a więc środek T opisanego na nim okręgu również leży wewnątrz trójkąta. Udowodnimy, że punkty D, O' oraz T leżą na jednej prostej. Okrąg o średnicy AB przechodzi przez punkty A' i B', skąd wyznaczamy $\sphericalangle B'A'D = 180^\circ - \sphericalangle B'A'B = \sphericalangle DAB$. Zatem z prostopadłości $DO' \perp A'B'$ otrzymujemy

$$\sphericalangle O'DB = 90^\circ - \sphericalangle B'A'D = 90^\circ - \sphericalangle DAB.$$

Z drugiej strony, w trójkącie równoramiennym DTB mamy

$$\sphericalangle TDB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DTB) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle DAB) = 90^\circ - \sphericalangle DAB.$$

W efekcie $\sphericalangle O'DB = \sphericalangle TDB$, co dowodzi, że punkt O' leży na prostej DT.

Zauważona wcześniej równość $O'A = O'B$ oznacza z kolei, że punkt O' leży na symetralnej boku AB.

Jeżeli $AD \neq BD$, to symetralna boku AB nie jest równoległa do prostej DT, a obie proste przecinają się w punkcie T. Ale punkt O' leży — jak wykazaliśmy — na obu tych prostych. Zatem punkt $O' = T$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD, co daje $O'A = O'D$. Twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych $OO'A$ i $OO'D$ prowadzi teraz do związku $OA = OD$. To jest jednak niemożliwe, gdyż sfera o środku O i promieniu OA jest sferą opisaną na rozważanym ostrosłupie, zaś punkt D znajduje się wewnątrz krawędzi bocznej CS, czyli nie może jednocześnie leżeć na tej sferze.

Wobec tego musi zachodzić równość $AD = BD$. Stąd oraz z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów prostokątnych ADC i BDC oraz do trójkątów prostokątnych ADS i BDS dostajemy $AC = BC$ oraz $AS = BS$. Analogiczne rozumowanie dowodzi, że $AB = CB$ oraz $AS = CS$. W rezultacie $AB = AC = BC$ i $SA = SB = SC$, czyli ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

Zadanie **12.** Mając dany skończony ciąg liczb, tworzymy z niego nowy ciąg, wstawiając pomiędzy każdą parę kolejnych wyrazów nowy wyraz, równy ich sumie. Rozpoczynamy od ciągu $(1,1)$ i wykonujemy wielokrotnie tę operację, otrzymując w pierwszym kroku ciąg $(1,2,1)$, w drugim kroku ciąg $(1,3,2,3,1)$ itd.

Dla każdego $n\geqslant 1$ obliczyć sumę sześcianów wyrazów ciągu otrzymanego w n-tym kroku.

Rozwiązanie

Dla $n=0,1,2,\ldots$ niech S_n oznacza sumę sześcianów wyrazów ciągu uzyskanego po wykonaniu n operacji; w szczególności mamy $S_0=1^3+1^3=2$ oraz $S_1=1^3+2^3+1^3=10$.

Znajdziemy zależność pomiędzy liczbami S_n i S_{n+1} dla dowolnego $n\geqslant 1$.

Ustalmy wartość $n\geqslant 1$ oraz niech $(x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x_k)$ będzie ciągiem otrzymanym po wykonaniu $n-1$ kroków. Zatem $x_0=x_k=1$ oraz

$$S_{n-1}=x_0^3+x_1^3+\ldots+x_{k-1}^3+x_k^3. \tag{1}$$

W n-tym kroku dostajemy ciąg

$$(x_0\,,\,x_0+x_1\,,\,x_1\,,\,x_1+x_2\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_{k-2}\,,\,x_{k-2}+x_{k-1}\,,\,x_{k-1}\,,\,x_{k-1}+x_k\,,\,x_k)$$

i wobec tego

$$\begin{aligned} S_n&=x_0^3+(x_0+x_1)^3+x_1^3+\ldots+x_{k-1}^3+(x_{k-1}+x_k)^3+x_k^3=\\ &=S_{n-1}+(x_0+x_1)^3+(x_1+x_2)^3+\ldots+(x_{k-2}+x_{k-1})^3+(x_{k-1}+x_k)^3. \end{aligned}\tag{2}$$

Dla $i=0,1,2,\ldots,k-1$ mamy

$$(x_i+x_{i+1})^3=x_i^3+x_{i+1}^3+3y_i,$$

gdzie oznaczyliśmy $y_i=x_i^2x_{i+1}+x_ix_{i+1}^2$. Dodając stronami powyższe k równości oraz stosując wzór (1) stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} (x_0+x_1)^3&+(x_1+x_2)^3+\ldots+(x_{k-2}+x_{k-1})^3+(x_{k-1}+x_k)^3=\\ &=(S_{n-1}-x_k^3)+(S_{n-1}-x_0^3)+3(y_0+y_1+\ldots+y_{k-2}+y_{k-1})=\\ &=2S_{n-1}-2+3(y_0+y_1+\ldots+y_{k-2}+y_{k-1}). \end{aligned}$$

W takim razie możemy przepisać zależność (2) w następujący sposób:

$$S_n=3S_{n-1}-2+3(y_0+y_1+\ldots+y_{k-2}+y_{k-1}),$$

a więc

$$3(y_0+y_1+\ldots+y_{k-2}+y_{k-1})=S_n-3S_{n-1}+2. \tag{3}$$

Rozważmy teraz ciąg uzyskany w $(n+1)$-szym kroku. Wstawione w tym kroku wyrazy są kolejno równe $2x_0+x_1$, x_0+2x_1, $2x_1+x_2$, x_1+2x_2, …, $2x_{k-1}+x_k$, $x_{k-1}+2x_k$. Aby obliczyć sumę ich sześcianów — która jest równa różnicy $S_{n+1}-S_n$ — zauważmy najpierw, że

$$(2x_i+x_{i+1})^3+(x_i+2x_{i+1})^3=9x_i^3+9x_{i+1}^3+18y_i$$

dla $i=0,1,2,\ldots,k-1$. Sumując stronami te k równości i ponownie stosując związek (1) dostajemy

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= 9(S_{n-1}-x_k^3)+9(S_{n-1}-x_0^3)+18(y_0+y_1+\ldots+y_{k-2}+y_{k-1}) = \\ &= 18S_{n-1}-18+18(y_0+y_1+\ldots+y_{k-2}+y_{k-1}). \end{aligned}$$

Wykorzystując teraz zależność (3) otrzymujemy

$$S_{n+1}-S_n = 18S_{n-1}-18+6(S_n-3S_{n-1}+2) = 6S_n-6$$

i ostatecznie

$$S_{n+1} = 7S_n - 6 \qquad \text{dla każdego } n \geqslant 1. \tag{4}$$

Pozostaje już tylko ze wzoru rekurencyjnego (4) wyprowadzić jawny wzór na n-ty wyraz ciągu S_1, S_2, S_3, ... W tym celu zauważmy, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ mamy

$$S_{n+1}-1 = 7S_n-7 = 7(S_n-1).$$

Stosując tę zależność wielokrotnie uzyskujemy

$$S_n-1 = 7(S_{n-1}-1) = 7^2(S_{n-2}-1) = \ldots = 7^{n-1}(S_1-1) = 7^{n-1}\cdot 9,$$

czyli szukana suma sześcianów wynosi $S_n = \mathbf{9\cdot 7^{n-1}+1}$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`