LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

17 lutego 2012 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

$$\begin{cases} a^3+b=c, \\ b^3+c=d, \\ c^3+d=a, \\ d^3+a=b. \end{cases}$$

2. Udowodnić, że w czworościanie $ABCD$ wierzchołek D, środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD, BCD i CAD są równe.

3. Niech m, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1,2,\ldots,n\}$ znajduje się dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m+1$ różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

18 lutego 2012 r. (drugi dzień zawodów)

4. Znaleźć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$g(f(x)-y)=f(g(y))+x.$$

5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB=60^\circ$ oraz $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI, prosta OI oraz prosta BC przecinają się w jednym punkcie.

6. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że $S(2^n+n)<S(2^n)$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.