LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2012 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba wymierna w, nie będąca liczbą całkowitą, że potęga w^w jest liczbą wymierną.

2. Wyznaczyć wszystkie pary (m,n) dodatnich liczb całkowitych, dla których sześcian K o krawędzi n można obudować prostopadłościennymi klockami o wymiarach $m\times 1\times 1$ w taki sposób, by powstał sześcian o krawędzi $n+2$, mający ten sam środek co K.

3. Trójkąt ABC, w którym $AB=AC$, jest wpisany w okrąg o. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach P i Q, są też styczne odpowiednio do odcinków AB i AC oraz są rozłączne z wnętrzem trójkąta ABC. Niech m będzie taką prostą styczną do okręgów o_1 i o_2, że punkty P i Q leżą po przeciwnej jej stronie niż punkt A. Prosta m przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że punkt przecięcia prostych PK i QL leży na dwusiecznej kąta BAC.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2012 r. (drugi dzień zawodów)

4. W turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geqslant 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Zakładamy, że nie istnieje taka czwórka zawodników (A,B,C,D), że A wygrał z B, B wygrał z C, C wygrał z D oraz D wygrał z A. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę takich trójek zawodników (A,B,C), że A wygrał z B, B wygrał z C oraz C wygrał z A.

(*Uwaga:* Trójki (A,B,C), (B,C,A) i (C,A,B) uważamy za jedną trójkę.)

5. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Niech M będzie takim punktem, że $MC \perp BC$ oraz $MA \perp AD$. Proste BM i OA przecinają się w punkcie P. Wykazać, że okrąg o środku P i przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC.

6. Dowieść, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right).$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.