LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (3 września 2012 r. – 3 października 2012 r.)

1. Dane są różne dodatnie liczby wymierne x i y, dla których liczba

$$w = \frac{x + \sqrt{y}}{y + \sqrt{x}}$$

jest wymierna. Wykazać, że obie liczby x i y są kwadratami liczb wymiernych.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Zakładamy, że okrąg opisany na trójkącie ABD przecina boki CB i CD odpowiednio w punktach K i L różnych od wierzchołków. Niech odcinek AN będzie średnicą tego okręgu. Udowodnić, że punkt N jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL.

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

4. Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, nie mającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 października 2012 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane później nie będą rozpatrywane.

LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

II seria (4 października 2012 r. – 5 listopada 2012 r.)

5. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $|20^m - 9^n|$, gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi.

6. Punkty P, Q i R leżą odpowiednio na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC, przy czym spełnione są równości $AR = RP = PC$ oraz $BR = RQ = QC$. Wykazać, że $AC + BC = 2AB$.

7. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\angle BCA = \angle BAD$, a sfera o środku S dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w środku okręgu opisanego na tej ścianie. Udowodnić, że proste AD i AS są prostopadłe.

(*Uwaga:* Sfera dopisana do czworościanu to sfera styczna do dokładnie jednej ściany oraz do trzech płaszczyzn zawierających pozostałe ściany.)

8. Na planszy o wymiarach $n \times n$ wyróżniono $2n - 1$ pól. Dowieść, że można pomalować pewną niezerową liczbę wyróżnionych pól na zielono w taki sposób, że:
- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest parzysta,

  albo
- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest nieparzysta.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 listopada 2012 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane później nie będą rozpatrywane.

LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

III seria (6 listopada 2012 r. – 6 grudnia 2012 r.)

9. Na płaszczyźnie ustawiono po jednym kamieniu w punktach o współrzędnych $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i $(1,1)$. W jednym ruchu wybieramy dowolny kamień i przestawiamy go symetrycznie względem któregoś z pozostałych kamieni. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie mogą znaleźć się na jednej prostej.

10. Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Niech α, β i γ będą kątami utworzonymi przez przekątną AC' z krawędziami AB, AD i AA'. Udowodnić, że

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \le \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$$

11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P, a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

12. Zbadać, czy istnieje liczba całkowita większa od 2012^{2012}, której nie można przedstawić w postaci $x^2 + y^3 + z^6$, gdzie x, y i z są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

6 grudnia 2012 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane później nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UAM, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

- Dla województwa podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UMK, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`