LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(3 września 2012 r. – 6 grudnia 2012 r.)

Zadanie **1.** Dane są różne dodatnie liczby wymierne x i y, dla których liczba

$$w = \frac{x+\sqrt{y}}{y+\sqrt{x}} \tag{1}$$

jest wymierna. Wykazać, że obie liczby x i y są kwadratami liczb wymiernych.

Rozwiązanie

Pomnóżmy obustronnie równość (1) przez mianownik $y+\sqrt{x}$, otrzymując

$$wy + w\sqrt{x} = x + \sqrt{y},$$

skąd

$$w\sqrt{x} - \sqrt{y} = x - wy. \tag{2}$$

Następnie podnieśmy obustronnie zależność (2) do kwadratu. Uzyskujemy

$$w^2x - 2w\sqrt{xy} + y = x^2 - 2wxy + w^2y^2,$$

a więc

$$2w\sqrt{xy} = w^2x + y - x^2 + 2wxy - w^2y^2. \tag{3}$$

Prawa strona związku (3) jest liczbą wymierną, a w jest dodatnią liczbą wymierną. W rezultacie liczba $a = \sqrt{xy}$ także jest wymierna.

Pomnóżmy teraz obie strony równości (2) przez $\sqrt{x}$. Dostajemy

$$wx - a = (x - wy)\sqrt{x}. \tag{4}$$

Mnożąc z kolei obustronnie zależność (2) przez $\sqrt{y}$ otrzymujemy

$$aw - y = (x - wy)\sqrt{y}. \tag{5}$$

Czynnik $x - wy$ występujący po prawej stronie związków (4) i (5) jest różny od zera. Przypuśćmy bowiem, wbrew tej tezie, że ma miejsce równość $x = wy$. Wówczas mnożąc obie jej strony przez $y + \sqrt{x}$ stwierdzamy, że

$$x(y+\sqrt{x}) = (x+\sqrt{y})y.$$

Wynika stąd zależność $x\sqrt{x} = y\sqrt{y}$, która jednak przeczy założeniu, że liczby x i y są różne. Zatem na mocy związków (4) i (5) liczby

$$\sqrt{x} = \frac{wx-a}{x-wy} \qquad \text{oraz} \qquad \sqrt{y} = \frac{aw-y}{x-wy}$$

są wymierne, co jest równoznaczne z tezą zadania.

Zadanie **2.** Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Zakładamy, że okrąg opisany na trójkącie ABD przecina boki CB i CD odpowiednio w punktach K i L różnych od wierzchołków. Niech odcinek AN będzie średnicą tego okręgu. Udowodnić, że punkt N jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL.

Rozwiązanie

Sposób I

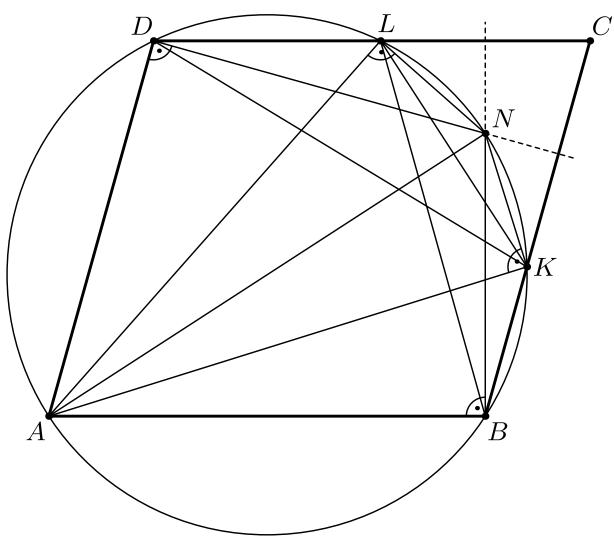
Punkty A, B, L oraz D leżą na jednym okręgu w wypisanej kolejności, a kąty wewnętrzne równoległoboku $ABCD$ przy wierzchołkach A i C mają równe miary (rys. 1). Stąd otrzymujemy

$$\sphericalangle BLC = 180^\circ - \sphericalangle BLD = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle BCL.$$

Wobec tego trójkąt BCL jest równoramienny.

Z drugiej strony, odcinek AN jest średnicą danego w treści zadania okręgu, więc proste AB i BN są prostopadłe. W efekcie również proste CD i BN są prostopadłe. Jednak w trójkącie równoramiennym BCL wysokość poprowadzona z wierzchołka B pokrywa się z symetralną boku CL, zatem z poprzedniego zdania wynika, że punkt N leży na symetralnej odcinka CL.

Podobnie dowodzimy, że trójkąt KCD jest równoramienny, a punkt N leży na symetralnej odcinka CK. W takim razie punkt N jest punktem przecięcia symetralnych dwóch boków trójkąta CKL, co pociąga za sobą tezę.



rys. 1

Sposób II

Na mocy określenia punktu N kąty ABN i ADN są proste (rys. 1). Z kolei w myśl założeń zadania kąty ABK i ADL są rozwarte. To oznacza, że punkty B i N leżą po przeciwnych stronach prostej AK, a punkty D i N leżą po przeciwnych stronach prostej AL. Zatem punkty A, B, K, N, L oraz D leżą na jednym okręgu w wypisanej kolejności, skąd uzyskujemy związki

$$\sphericalangle ANK = 180^\circ - \sphericalangle ABK \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle ANL = 180^\circ - \sphericalangle ADL.$$

Jednak czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem i w konsekwencji prawe strony powyższych dwóch zależności są równe $\sphericalangle BCD$. To oznacza, że

$$\sphericalangle ANK = \sphericalangle ANL = \sphericalangle BCD. \tag{1}$$

Na podstawie równości (1) kąty wewnętrzne trójkątów AKN i ALN przy wierzchołku N mają równe miary. Ponadto kąty wewnętrzne tych trójkątów odpowiednio przy wierzchołkach K i L są proste jako kąty wpisane oparte na średnicy okręgu. W takim razie trójkąty AKN i ALN są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). Co więcej, mają one wspólny odpowiedni bok AN, a więc są przystające. Wobec tego $NK = NL$, czyli istnieje okrąg o o środku w punkcie N, przechodzący przez punkty K i L. Ponadto punkty N i C leżą po tej samej stronie prostej KL, a z zależności (1) otrzymujemy

$$\sphericalangle KNL = \sphericalangle ANK + \sphericalangle ANL = 2\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle KCL,$$

skąd wynika, że okrąg o przechodzi także przez punkt C. Okrąg o o środku N jest więc okręgiem opisanym na trójkącie CKL, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **3.** Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Sposób I

Suma wszystkich dodatnich dzielników liczby n jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba nieparzystych składników tej sumy jest nieparzysta. Zatem na mocy warunków zadania zbiór nieparzystych dodatnich dzielników liczby n ma nieparzystą liczbę elementów.

Niech k będzie największą taką nieujemną liczbą całkowitą, że potęga 2^k jest dzielnikiem liczby n. Wtedy prawdziwy jest rozkład $n = 2^k \cdot m$, w którym czynnik m jest nieparzysty. Z rozkładu tego wynika, że dowolny nieparzysty dzielnik liczby n jest również dzielnikiem liczby m. Na odwrót, każdy dzielnik liczby m jest też dzielnikiem liczby n. Wobec tego zbiór nieparzystych dzielników liczby n pokrywa się ze zbiorem nieparzystych dzielników liczby m.

Liczba m jest nieparzysta, więc wszystkie jej dodatnie dzielniki także są nieparzyste. Stąd wnioskujemy, że liczba wszystkich dodatnich dzielników liczby m jest nieparzysta.

Przyporządkujmy każdemu dodatniemu dzielnikowi d liczby m mniejszemu od $\sqrt{m}$ liczbę całkowitą $\frac{m}{d}$; jest ona dzielnikiem liczby m większym od $\sqrt{m}$. Wówczas różnym dzielnikom d odpowiadają różne wartości ilorazu $\frac{m}{d}$. Ponadto każdy dzielnik liczby m większy od $\sqrt{m}$ można uzyskać w ten sposób:

dzielnik g liczby m większy od $\sqrt{m}$ został bowiem przypisany dzielnikowi $\frac{m}{g}$ mniejszemu od $\sqrt{m}$. W rezultacie zbiór dodatnich dzielników liczby m mniejszych od $\sqrt{m}$ ma tyle samo elementów, co zbiór dzielników liczby m większych od $\sqrt{m}$. W takim razie liczba dodatnich dzielników liczby m różnych od $\sqrt{m}$ jest parzysta. To wraz z ostatnim zdaniem poprzedniego akapitu dowodzi, że $a=\sqrt{m}$ jest liczbą całkowitą będącą dzielnikiem liczby m. Innymi słowy, liczba m jest kwadratem liczby całkowitej a.

Jeżeli teraz k jest liczbą parzystą, to ma miejsce równość $k=2b$ dla pewnej liczby całkowitej $b\geqslant 0$, skąd $n=2^k\cdot m=2^{2b}\cdot a^2=(2^b\cdot a)^2$. Jeżeli natomiast k jest liczbą nieparzystą, to $k=2c+1$ dla pewnej liczby całkowitej $c\geqslant 0$ i w efekcie $n=2^k\cdot m=2^{2c+1}\cdot a^2=2(2^c\cdot a)^2$. Zatem liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Sposób II

Niech p_1, p_2, ..., p_k będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczby n. Rozkładając liczbę n na czynniki pierwsze uzyskujemy więc przedstawienie

$$n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k},$$

w którym wykładniki a_1, a_2, ..., a_k są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Dowolny dodatni dzielnik liczby n ma wtedy postać $p_1^{b_1}\cdot p_2^{b_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{b_k}$, gdzie wykładniki b_1, b_2, ..., b_k są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $0\leqslant b_i\leqslant a_i$ dla $i=1,2,\ldots,k$. Na odwrót, każdy iloczyn tej postaci jest dzielnikiem liczby n. Zauważmy następnie, że suma wszystkich możliwych iloczynów tej postaci wynosi

$$S=(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{a_1})\cdot(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{a_2})\cdot\ldots\cdot(1+p_k+p_k^2+\ldots+p_k^{a_k}).$$

Rzeczywiście, wymnażając wszystkie nawiasy po prawej stronie powyższej równości otrzymujemy sumę wszystkich możliwych iloczynów $p_1^{b_1}\cdot p_2^{b_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{b_k}$, w których $b_i\in\{0,1,2,\ldots,a_i\}$ dla $i=1,2,\ldots,k$.

Wobec tego liczba S jest sumą wszystkich dodatnich dzielników liczby n. Zatem w myśl warunków zadania wszystkie czynniki iloczynu stojącego po prawej stronie wzoru określającego liczbę S muszą być liczbami nieparzystymi. Jeżeli teraz dla pewnego wskaźnika $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ liczba pierwsza p_i jest nieparzysta, to z nieparzystości sumy $1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{a_i}$ wynika, że liczba jej składników musi być nieparzysta, czyli wykładnik a_i jest liczbą parzystą. W takim razie dowolna nieparzysta liczba pierwsza wchodzi do rozkładu liczby n na czynniki pierwsze z wykładnikiem parzystym.

Możliwe są więc dwie sytuacje: w rozkładzie liczby n na czynniki pierwsze albo wszystkie liczby pierwsze występują z wykładnikiem parzystym, albo też wszystkie nieparzyste liczby pierwsze występują z wykładnikiem parzystym, a liczba pierwsza 2 występuje z wykładnikiem nieparzystym. W drugim przypadku liczba n jest parzysta oraz wszystkie liczby pierwsze występują z wykładnikiem parzystym w rozkładzie liczby $\frac{1}{2}n$ na czynniki pierwsze.

Jeżeli wszystkie liczby pierwsze wchodzą z wykładnikiem parzystym do rozkładu pewnej dodatniej liczby całkowitej m na czynniki pierwsze, to jest ona kwadratem liczby całkowitej. Istotnie, niech $q_1, q_2, \ldots, q_\ell$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczby m. Wtedy rozkład liczby m przybiera postać $m = q_1^{2c_1} \cdot q_2^{2c_2} \cdot \ldots \cdot q_\ell^{2c_\ell}$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych $c_1, c_2, \ldots, c_\ell$, skąd wynika, że liczba m jest kwadratem liczby całkowitej $q_1^{c_1} \cdot q_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot q_\ell^{c_\ell}$.

Na mocy stwierdzeń zawartych w dwóch poprzednich akapitach liczba n lub liczba $\frac{1}{2}n$ jest kwadratem liczby całkowitej, co dowodzi tezy zadania.

Zadanie **4.** Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, nie mającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Rozwiązanie

Udowodnimy, że Michał ma strategię wygrywającą.

Przypuśćmy, że Michał na początku gry rysuje dowolną spośród 1006 najdłuższych przekątnych danego 2012-kąta foremnego (prosta ℓ zawierająca tak wybraną przekątną q jest wówczas osią symetrii rozważanego 2012-kąta), a w każdym ze swoich następnych ruchów dorysowuje przekątną symetryczną względem prostej ℓ do przekątnej narysowanej przed chwilą przez Jurka.

Wykażemy, że przy każdym swoim ruchu Michał będzie mógł zastosować opisaną strategię nie naruszając zasad gry. Wyniknie stąd, że doprowadzi go ona do wygranej, gdyż po każdym ruchu Jurka Michał będzie w stanie wykonać kolejny ruch i w rezultacie nie Michał — a więc Jurek — w pewnym momencie znajdzie się w sytuacji, w której dorysowanie kolejnej przekątnej w sposób zgodny z wymaganiami zadania stanie się niemożliwe.

Zauważmy najpierw, że dopóki Michał stosuje opisaną strategię, dopóty po dowolnym jego ruchu zbiór wszystkich przekątnych narysowanych w danej chwili na tablicy jest symetryczny względem prostej ℓ. Istotnie, pierwszy ruch Michała polega na narysowaniu przekątnej zawartej w prostej ℓ. Natomiast później wykonywane są pary ruchów, złożone z ruchu Jurka i następującego po nim ruchu Michała; w wyniku wykonania każdej takiej pary na tablicy pojawiają się dwie nowe przekątne symetryczne względem prostej ℓ.

Udowodnimy teraz, że jeżeli we wszystkich poprzednich ruchach Michał stosował rozpatrywaną strategię, to może ją również zastosować w bieżącym ruchu w odpowiedzi na ruch wykonany przez Jurka. Wyniknie stąd teza.

Niech p oznacza przekątną, którą w wykonanym przed chwilą ruchu narysował Jurek. Przed narysowaniem tej przekątnej zbiór $\mathcal{S}$ przekątnych znajdujących się wówczas na tablicy był symetryczny względem prostej ℓ i zawierał przekątną q. Ponieważ ruch Jurka był zgodny z regułami gry, więc przekątna p nie ma punktów wspólnych (wewnętrznych ani końców) z żadną przekątną ze zbioru $\mathcal{S}$ — w szczególności z przekątną q, co oznacza, że przekątna p jest zawarta w jednej z dwóch otwartych półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą ℓ. Na mocy dwóch poprzednich zdań także przekątna p', symetryczna do przekątnej p względem prostej ℓ, nie ma punktów wspólnych z żadną przekątną ze zbioru $\mathcal{S}$. Ponadto przekątne p' i p również nie mają punktów wspólnych, gdyż leżą one po przeciwnych stronach prostej ℓ. Wobec tego Michał może narysować na tablicy przekątną p' w zgodzie z zasadami gry i rozważaną strategią, a to właśnie należało wykazać.

Odpowiedź: Strategię wygrywającą ma Michał.

Zadanie **5.** Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $|20^m - 9^n|$, gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie

Dla $m=n=1$ otrzymujemy wartość $|20^1 - 9^1| = 11$. Udowodnimy, że jest to najmniejsza możliwa wartość rozpatrywanego wyrażenia.

Z algorytmu mnożenia pisemnego wynika, że jeżeli dwie dodatnie liczby całkowite mają w zapisie dziesiętnym cyfrę jedności równą 9, to iloczyn tych dwóch liczb ma taką samą cyfrę jedności, jak iloczyn $9\cdot 9$, czyli cyfrę 1. Natomiast iloczyn dwóch dodatnich liczb całkowitych o cyfrach jedności równych odpowiednio 1 i 9 ma cyfrę jedności 9. Zatem cyfry jedności potęg 9^n dla $n=1,2,3$ są na przemian równe 9 i 1. Liczba 20^m jest zaś podzielna przez 10 dla każdej liczby całkowitej $m \geqslant 1$. Wobec tego dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m i n cyfra jedności liczby $|20^m - 9^n|$ wynosi 1 lub 9.

Należy więc wykazać, że dane wyrażenie nie może być równe 1 ani 9.

Liczba 20^m nie jest podzielna przez 9, gdyż w jej rozkładzie na czynniki pierwsze występują tylko liczby 2 i 5. To oznacza, że również różnica $20^m - 9^n$ nie jest podzielna przez 9 i w konsekwencji $|20^m - 9^n| \neq 9$ dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m i n.

Przypuśćmy z kolei, że dla pewnych liczb całkowitych $m, n \geqslant 1$ spełniona jest równość $|20^m - 9^n| = 1$. W takim razie $20^m - 9^n = 1$ lub $20^m - 9^n = -1$. W pierwszym przypadku dostajemy zależność

$$9^n = 20^m - 1 = (20-1)(20^{m-1} + 20^{m-2} + 20^{m-3} + \ldots + 20^2 + 20 + 1),$$

która pociąga za sobą podzielność liczby 9^n przez 19, co jednak nie może mieć miejsca. Przejdźmy teraz do przypadku $20^m - 9^n = -1$. Gdyby wykładnik m był liczbą nieparzystą, to z równości

$$9^n = 20^m + 1 = (20+1)(20^{m-1} - 20^{m-2} + 20^{m-3} - \ldots + 20^2 - 20 + 1)$$

uzyskalibyśmy podzielność liczby 9^n przez 21 i tym bardziej przez 7, co nie jest możliwe. Stąd wniosek, że wykładnik m jest liczbą parzystą, czyli $m=2k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k. Otrzymujemy zatem rozkład

$$-1 = 20^m - 9^n = 20^{2k} - 3^{2n} = (20^k - 3^n)(20^k + 3^n),$$

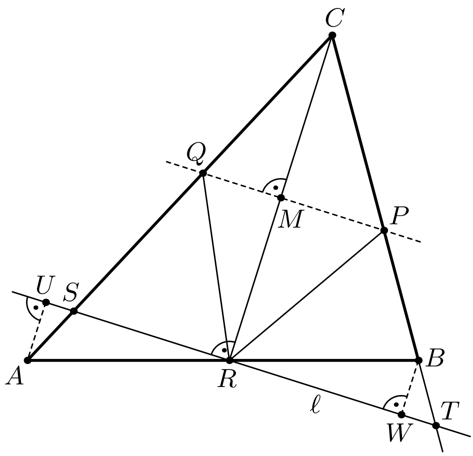
w którym każda z dwóch liczb całkowitych stojących w nawiasach po prawej stronie musi być równa 1 albo -1. To przeczy nierówności $20^k+3^n \geqslant 20+3$, a więc rozwiązanie jest zakończone.

Odpowiedź: Szukana najmniejsza wartość wynosi 11.

Zadanie **6.** Punkty P, Q i R leżą odpowiednio na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC, przy czym spełnione są równości $AR=RP=PC$ oraz $BR=RQ=QC$. Wykazać, że $AC+BC=2AB$.

Rozwiązanie

Sposób I



rys. 2

Poprowadźmy przez punkt R prostą ℓ prostopadłą do prostej CR. Niech prosta ℓ przecina proste CA i CB odpowiednio w punktach S i T (rys. 2).

W myśl warunku $RQ=QC$ punkt Q leży na symetralnej boku CR trójkąta prostokątnego CRS. Podobnie punkt P leży na symetralnej boku CR trójkąta prostokątnego CRT. Symetralna przyprostokątnej w trójkącie prostokątnym przechodzi przez środek przeciwprostokątnej. Zatem punkty Q i P są odpowiednio środkami odcinków CS i CT, skąd wnioskujemy, że punkty S i T leżą odpowiednio na półprostych $CA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$, a ponadto

(1) $$CS=2QC=2BR \qquad \text{oraz} \qquad CT=2PC=2AR.$$

Oznaczmy przez U i W rzuty prostokątne odpowiednio punktów A i B na prostą ℓ. Wówczas proste AU i BW są równoległe, a więc trójkąty ARU i BRW są jednokładne względem punktu R. Stąd uzyskujemy związek

(2) $$\frac{AR}{BR}=\frac{AU}{BW}.$$

Podobnie uzasadniamy, że

(3) $$\frac{BT}{CT}=\frac{BW}{CR} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{CS}{AS}=\frac{CR}{AU}.$$

Mnożąc stronami zależności (2) i (3) stwierdzamy, że

$$\frac{AR}{BR}\cdot\frac{BT}{CT}\cdot\frac{CS}{AS}=1. \tag{4}$$

Łącząc teraz równości (1) i (4) dostajemy zależność

$$BT=AS. \tag{5}$$

Prosta ℓ albo przecina prostą AB w punkcie R, albo się z nią pokrywa. To oznacza, że punkty S i T leżą po przeciwnych stronach prostej AB albo też oba leżą na prostej AB. W obu przypadkach z równości (5) wynika, że suma długości odcinków CA i CB jest taka sama, jak suma długości odcinków CS i CT. Stąd i ze związków (1) otrzymujemy

$$AC+BC=CS+CT=2BR+2AR=2(BR+AR)=2AB.$$

Sposób II

Stosując twierdzenie sinusów do trójkątów ABC i RBP (rys. 2) oraz korzystając z równości danych w treści zadania uzyskujemy

$$\begin{aligned}\frac{AC}{AB}&=\frac{\sin\sphericalangle ABC}{\sin\sphericalangle BCA}=\frac{\sin\sphericalangle RBP}{\sin\sphericalangle RPB}\cdot\frac{\sin\sphericalangle RPB}{\sin\sphericalangle BCA}=\\&=\frac{RP}{BR}\cdot\frac{\sin\sphericalangle RPB}{\sin\sphericalangle BCA}=\frac{CP}{CQ}\cdot\frac{\sin\sphericalangle RPB}{\sin\sphericalangle BCA}.\end{aligned} \tag{6}$$

W trójkącie równoramiennym RPC prawdziwy jest związek $\sphericalangle CRP=\sphericalangle PCR$, z którego wynika zależność

$$\sphericalangle RPB=180^\circ-\sphericalangle RPC=2\sphericalangle PCR. \tag{7}$$

Z kolei na podstawie równości $RP=PC$ i $RQ=QC$ punkty P i Q leżą na symetralnej odcinka CR. Zatem środek M tego odcinka leży na prostej PQ, a trójkąty PMC i QMC mają kąt prosty przy wierzchołku M. To wraz ze związkiem (7) dowodzi, że

$$\begin{aligned}&\frac{CP}{CQ}\cdot\sin\sphericalangle RPB=\frac{CM}{CQ}\cdot\frac{CP}{CM}\cdot\sin 2\sphericalangle PCR=\\&\qquad=\frac{\cos\sphericalangle QCR}{\cos\sphericalangle PCR}\cdot 2\sin\sphericalangle PCR\cos\sphericalangle PCR=2\cos\sphericalangle QCR\sin\sphericalangle PCR.\end{aligned} \tag{8}$$

Łącząc zależności (6) i (8) otrzymujemy równość

$$\frac{AC}{AB}=\frac{2\cos\sphericalangle QCR\sin\sphericalangle PCR}{\sin\sphericalangle BCA}. \tag{9}$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$\frac{BC}{AB}=\frac{2\cos\sphericalangle PCR\sin\sphericalangle QCR}{\sin\sphericalangle BCA}. \tag{10}$$

Dodając stronami związki (9) i (10) dochodzimy do wniosku, że

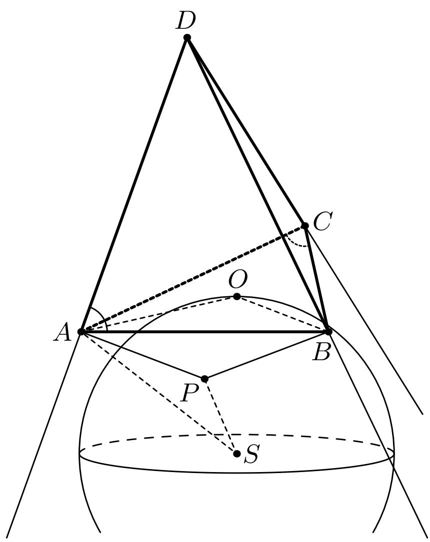
$$\frac{AC+BC}{AB}=\frac{2\sin(\sphericalangle PCR+\sphericalangle QCR)}{\sin\sphericalangle BCA}=\frac{2\sin\sphericalangle BCA}{\sin\sphericalangle BCA}=2,$$

co należało udowodnić.

Zadanie **7.** Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle BCA=\sphericalangle BAD$, a sfera o środku S dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w środku okręgu opisanego na tej ścianie. Udowodnić, że proste AD i AS są prostopadłe.

(*Uwaga:* Sfera dopisana do czworościanu to sfera styczna do dokładnie jednej ściany oraz do trzech płaszczyzn zawierających pozostałe ściany.)

Rozwiązanie



rys. 3

Niech O oznacza środek okręgu opisanego na ścianie ABC, a P — punkt styczności danej w treści zadania sfery do płaszczyzny ABD (rys. 3).

Odcinki stycznych do sfery poprowadzonych z tego samego punktu mają równe długości, skąd na mocy założeń zadania otrzymujemy związki $AO=AP$ i $BO=BP$. Z drugiej strony, na podstawie określenia punktu O prawdziwa jest zależność $OA=OB$. W takim razie odcinki AP, AO, BO i BP mają jednakowe długości. To z kolei dowodzi, że trójkąty AOB oraz APB są równoramienne i przystające (cecha *bok-bok-bok*), co pociąga za sobą równość

(1) $$\sphericalangle BPA=\sphericalangle BOA.$$

Punkt O leży wewnątrz ściany ABC i jest środkiem opisanego na niej okręgu. Stąd, w myśl związku pomiędzy kątami środkowym i wpisanym, uzyskujemy

(2) $$\sphericalangle BOA=2\sphericalangle BCA.$$

Łącząc równości (1) i (2) z równością daną w treści zadania stwierdzamy, że

$$\sphericalangle BPA = 2\sphericalangle BAD. \tag{3}$$

Ponadto w trójkącie równoramiennym APB spełniona jest zależność

$$\sphericalangle PAB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BPA),$$

która wraz ze związkiem (3) prowadzi do równości

$$\sphericalangle PAD = \sphericalangle PAB + \sphericalangle BAD = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle BAD) + \sphericalangle BAD = 90^\circ.$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że proste AD i AP są prostopadłe.

Płaszczyzna ABD jest styczna w punkcie P do rozważanej sfery, skąd wynika, że prosta SP jest prostopadła do tej płaszczyzny. Zatem prosta SP jest prostopadła do leżącej w tej płaszczyźnie prostej AD. W konsekwencji prosta AD jest prostopadła do nierównoległych prostych AP i SP leżących w płaszczyźnie ASP. Prosta AD jest więc prostopadła do płaszczyzny ASP, czyli jest prostopadła do leżącej w tej płaszczyźnie prostej AS, co daje tezę.

Zadanie **8.** Na planszy o wymiarach $n \times n$ wyróżniono $2n-1$ pól. Dowieść, że można pomalować pewną niezerową liczbę wyróżnionych pól na zielono w taki sposób, że:

- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest parzysta,

  albo

- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest nieparzysta.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech S oznacza zbiór wszystkich $2n-1$ wyróżnionych pól planszy.

Przyporządkujmy każdemu podzbiorowi zbioru S pewien $2n$-wyrazowy ciąg o wyrazach równych 0 lub 1 w następujący sposób. Niech A będzie dowolnym podzbiorem zbioru S. Dla $i=1,2,\ldots,n$ oznaczmy przez w_i oraz k_i liczbę pól zbioru A leżących odpowiednio w i-tym wierszu oraz w i-tej kolumnie planszy. Zastąpmy każdy parzysty wyraz ciągu $(w_1,w_2,\ldots,w_n,k_1,k_2,\ldots,k_n)$ liczbą 0, a każdy nieparzysty wyraz — liczbą 1. Uzyskany $2n$-wyrazowy ciąg przypisujemy zbiorowi A. Zauważmy, że suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest parzysta, gdyż suma $(w_1+w_2+\ldots+w_n)+(k_1+k_2+\ldots+k_n)$ jest równa podwojonej liczbie pól zbioru A.

Liczba $2n$-wyrazowych ciągów o wyrazach równych 0 lub 1 i parzystej sumie wszystkich wyrazów wynosi 2^{2n-1}. Początkowe $2n-1$ wyrazów można bowiem wybrać dowolnie na 2^{2n-1} sposobów, a dla każdego takiego wyboru ostatni wyraz jest jednoznacznie wyznaczony.

Każdemu spośród 2^{2n-1} podzbiorów zbioru S przyporządkowaliśmy więc jeden z 2^{2n-1} możliwych ciągów. Zatem albo każdy ciąg został przypisany dokładnie jednemu podzbiorowi, albo istnieją dwa różne podzbiory, którym przyporządkowany został ten sam ciąg.

W pierwszym przypadku istnieje podzbiór A zbioru S, któremu przypisany został ciąg o wszystkich wyrazach równych 1. Wtedy w każdym wierszu i w każdej kolumnie planszy znajduje się nieparzysta liczba pól ze zbioru A. Wobec tego w wyniku pomalowania wszystkich pól zbioru A na zielono otrzymujemy rozmieszczenie zielonych pól spełniające żądany warunek.

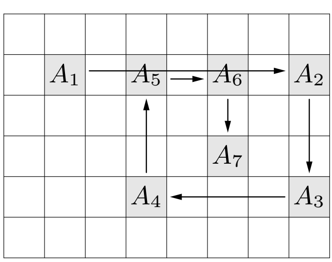
W drugim przypadku zaś istnieją dwa różne podzbiory B_1 i B_2 zbioru S, którym przypisany został ten sam ciąg. Niech B będzie *różnicą symetryczną* zbiorów B_1 i B_2, czyli zbiorem tych pól, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów B_1 i B_2. W myśl relacji $B_1 \neq B_2$ zbiór B jest niepusty. Rozpatrzmy dowolną linię (wiersz lub kolumnę) danej planszy. Niech m_1, m_2 i m oznaczają liczby tych pól wybranej linii, które należą odpowiednio do zbiorów B_1, B_2 i do ich części wspólnej $B_1 \cap B_2$. Na mocy określenia zbiorów B_1 i B_2 liczby m_1 i m_2 mają jednakową parzystość. W efekcie liczba pól rozważanej linii należących do zbioru B wynosi $(m_1 - m) + (m_2 - m) = (m_1 + m_2) - 2m$, a więc jest liczbą parzystą. Stąd wniosek, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie planszy znajduje się parzysta liczba pól ze zbioru B. Pozostaje pomalować wszystkie pola zbioru B na zielono.

Sposób II

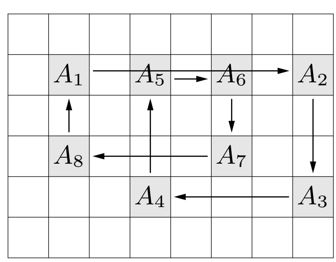
Wprowadzimy najpierw kilka pojęć.

Zbiór pól planszy nazwiemy *parzystym* (*nieparzystym*), jeżeli w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się parzysta (odpowiednio: nieparzysta) liczba pól z tego zbioru. Teza zadania sprowadza się zatem do wykazania, że istnieje niepusty parzysty lub nieparzysty zbiór złożony z wyróżnionych pól.

Ciąg różnych pól planszy nazwiemy *dopuszczalnym* (rys. 4), jeżeli dowolne dwa sąsiednie pola tego ciągu leżą w jednym wierszu albo w jednej kolumnie, ale żadne trzy kolejne pola ciągu nie leżą w jednym wierszu ani w jednej kolumnie. Ciąg dopuszczalny $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ nazwiemy *cyklicznym* (rys. 5), jeżeli $k \geqslant 3$ oraz ciąg $(A_3, A_4, \ldots, A_k, A_1, A_2)$ jest także dopuszczalny.



rys. 4



rys. 5

Środki kolejnych pól ciągu cyklicznego są kolejnymi wierzchołkami łamanej zamkniętej, której kolejne odcinki są na przemian poziome i pionowe.

W każdym wierszu znajduje się pewna (być może zerowa) liczba poziomych odcinków tej łamanej. Każdy z nich ma dwa różne końce, a dwa różne odcinki nie mogą mieć wspólnego końca, gdyż ciąg cykliczny składa się z różnych pól planszy. To oznacza, że w dowolnym wierszu — i analogicznie w dowolnej kolumnie — liczba pól występujących w ciągu cyklicznym jest parzysta. Stąd zbiór wszystkich pól ciągu cyklicznego jest niepustym zbiorem parzystym.

Przechodzimy do rozwiązania zadania.

Wykażemy ogólniejsze stwierdzenie: Jeżeli m i n są dowolnymi dodatnimi liczbami całkowitymi o jednakowej parzystości oraz na prostokątnej planszy o wymiarach $m\times n$ wyróżniono $m+n-1$ pól, to istnieje niepusty parzysty lub nieparzysty zbiór złożony z wyróżnionych pól.

Zastosujemy indukcję ze względu na wartość sumy $m+n$.

Jeżeli $m=n=1$, to teza jest spełniona. Co więcej, jest ona spełniona, gdy choć jedna z liczb m, n jest równa 1. Wtedy bowiem liczba pól planszy wynosi $m+n-1$ i wszystkie one są wyróżnione. A ponieważ liczby m i n są nieparzyste, więc wszystkie pola planszy tworzą szukany zbiór nieparzysty.

Niech z kolei m i n będą takimi liczbami całkowitymi o tej samej parzystości, większymi od 1, że dowodzone stwierdzenie jest prawdziwe dla każdej planszy, w której suma liczby wierszy i liczby kolumn jest liczbą parzystą mniejszą od $m+n$. Rozpatrzmy dowolną planszę o wymiarach $m\times n$, na której wyróżniono $m+n-1$ pól.

Weźmy pod uwagę wszystkie ciągi dopuszczalne, w których każde pole jest jednym z $m+n-1$ wyróżnionych pól. Spośród tych ciągów wybierzmy ciąg $\mathcal{A}=(A_1,A_2,\dots,A_k)$ o największej możliwej długości. Liczby m i n są mniejsze od $m+n-1$; w efekcie w pewnym wierszu, jak i w pewnej kolumnie, leżą co najmniej dwa wyróżnione pola, skąd otrzymujemy nierówność $k\geqslant 2$.

Nie tracąc ogólności rozumowania przyjmijmy, że pola A_{k-1} i A_k leżą w jednej kolumnie K. Oznaczmy przez W wiersz, w którym leży pole A_k.

Wiersz W nie zawiera żadnego pola wyróżnionego nie występującego w ciągu $\mathcal{A}$ — gdyby bowiem istniało takie pole B, to ciąg $(A_1,A_2,\dots,A_n,B)$ byłby ciągiem dopuszczalnym dłuższym od ciągu $\mathcal{A}$, wbrew wyborowi tego ostatniego. W takim razie możliwe są dwie sytuacje:

1. Pole A_k jest jedynym wyróżnionym polem wiersza W.

2. Wiersz W zawiera, oprócz pola A_k, inne pola występujące w ciągu $\mathcal{A}$.

W pierwszej sytuacji możemy wyodrębnić następujące trzy przypadki:

1a. Pola A_{k-1} i A_k są jedynymi wyróżnionymi polami kolumny K.

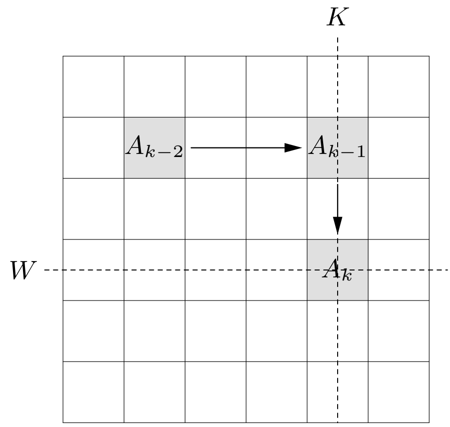
1b. Kolumna K zawiera wyróżnione pole nie występujące w ciągu $\mathcal{A}$.

1c. Kolumna K zawiera, oprócz pól A_{k-1} i A_k, inne wyróżnione pola, z których wszystkie występują w ciągu $\mathcal{A}$.

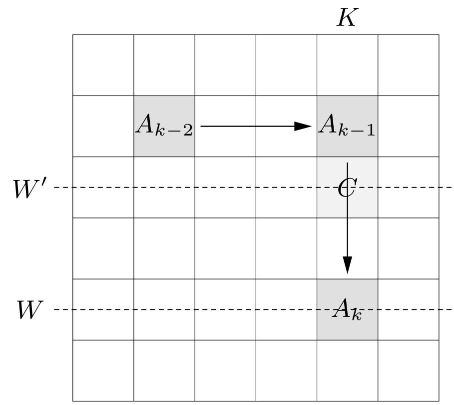
Rozpatrzymy teraz po kolei wszystkie cztery przypadki.

Przypadek **1a.** Wykreślmy z planszy wiersz W i kolumnę K, usuwając w ten sposób dwa wyróżnione pola: A_{k-1} i A_k (rys. 6). Uzyskana mniejsza plansza o wymiarach $(m-1)\times(n-1)$ zawiera $m+n-3=(m-1)+(n-1)-1$ wyróżnionych pól. Ponadto liczby $m-1$ i $n-1$ mają jednakową parzystość. Zatem na podstawie założenia indukcyjnego istnieje niepusty parzysty lub nieparzysty zbiór $\mathcal{S}$, złożony z niektórych wyróżnionych pól mniejszej planszy.

Przywróćmy teraz wiersz W i kolumnę K. Jeżeli zbiór $\mathcal{S}$ jest parzysty na mniejszej planszy, to jest też parzysty na wyjściowej planszy o wymiarach $m\times n$. Jeżeli natomiast zbiór $\mathcal{S}$ jest nieparzysty na mniejszej planszy, to zbiór $\mathcal{S}\cup\{A_k\}$ jest nieparzysty na wyjściowej planszy, gdyż w wierszu W i w kolumnie K — jedynych nie leżących na mniejszej planszy — znajduje się dokładnie jedno pole z tego zbioru, a mianowicie pole A_k.



rys. 6



rys. 7

Przypadek **1b.** Niech C będzie wyróżnionym polem kolumny K, które nie występuje w ciągu $\mathcal{A}$, a W' — wierszem zawierającym pole C. Zauważmy, że ciąg $\mathcal{A}'=(A_1,A_2,\ldots,A_{k-1},C)$ jest ciągiem dopuszczalnym o tej samej długości, co ciąg $\mathcal{A}$. Jeżeli w wierszu W' istnieją wyróżnione pola inne niż pole C, to zamieniając ciąg $\mathcal{A}$ na ciąg $\mathcal{A}'$ przechodzimy do przypadku **2.** (w którym nie wykonujemy dalszego przejścia do innego przypadku).

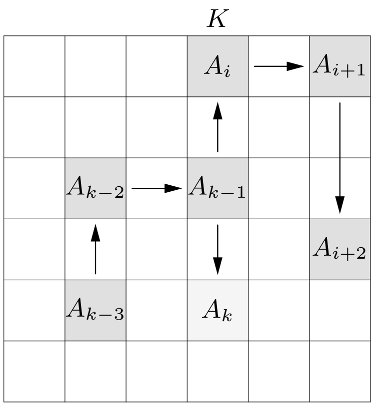
Załóżmy więc, że pole C jest jedynym wyróżnionym polem wiersza W'.

Wykreślmy z planszy wiersze W i W', usuwając dwa wyróżnione pola: A_k i C (rys. 7). Nierówność $m+n\geqslant 4$ dowodzi, że pozostałe wiersze zawierają co najmniej jedno wyróżnione pole, czyli nie wykreśliliśmy całej planszy.

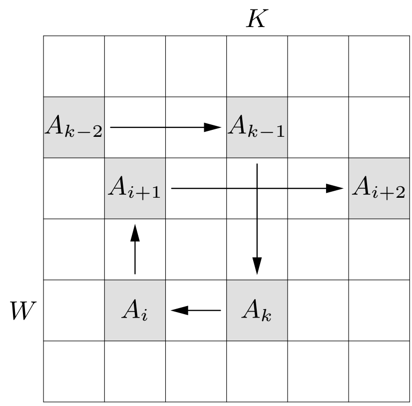
Dalej postępujemy analogicznie do przypadku **1a.** Na mniejszej planszy liczba wierszy ma tę samą parzystość, co liczba kolumn, a suma tych dwóch liczb pomniejszona o 1 jest równa liczbie pól wyróżnionych. Zatem na mocy założenia indukcyjnego istnieje niepusty parzysty lub nieparzysty zbiór $\mathcal{S}$, złożony z niektórych wyróżnionych pól mniejszej planszy. Jeżeli zbiór $\mathcal{S}$ jest parzysty na mniejszej planszy, to jest także parzysty na wyjściowej planszy. Jeżeli zaś zbiór $\mathcal{S}$ jest nieparzysty na mniejszej planszy, to zbiór $\mathcal{S}\cup\{A_k,C\}$ jest nieparzysty na wyjściowej planszy. Rzeczywiście: każdy z wierszy W i W'

zawiera jedno pole z tego zbioru, a kolumna K — dwa dodatkowe pola w porównaniu z mniejszą planszą. Natomiast wszystkie pozostałe wiersze i kolumny zawierają na obu planszach tyle samo pól z tego zbioru.

Przypadek **1c.** Z założenia przynajmniej jedno z pól A_1, A_2, A_3, …, A_{k-2} leży w kolumnie K. Istnieje więc największy wskaźnik $i\in\{1,2,3,\ldots,k-2\}$, dla którego pole A_i leży w kolumnie K (rys. 8). Wtedy $i\neq k-2$, gdyż pola A_{k-2}, A_{k-1} i A_k nie mogą jednocześnie leżeć w kolumnie K. Co więcej, z wyboru wskaźnika i wynika, że pola A_i oraz A_{i+1} nie mogą leżeć w jednej kolumnie, czyli leżą one w jednym wierszu. Wobec tego pola A_{k-2} oraz A_{k-1} leżą w jednym wierszu, pola A_{k-1} oraz A_i leżą w jednej kolumnie, a pola A_i oraz A_{i+1} leżą w jednym wierszu. Stąd ciąg $(A_i,A_{i+1},\ldots,A_{k-2},A_{k-1})$ jest ciągiem cyklicznym i w konsekwencji zbiór pól tego ciągu jest niepustym zbiorem parzystym złożonym z wyróżnionych pól planszy.



rys. 8



rys. 9

Przypadek **2.** Wówczas istnieje największy wskaźnik $i\in\{1,2,3,\ldots,k-1\}$, dla którego pole A_i leży w wierszu W. Ponadto $i\neq k-1$, gdyż pole A_{k-1} leży w tej samej kolumnie, co pole A_k znajdujące się w wierszu W. Zatem w myśl określenia wskaźnika i pole A_{i+1} nie leży w wierszu W. Wobec tego pola A_{k-1} oraz A_k leżą w jednej kolumnie K, pola A_k oraz A_i leżą w jednym wierszu W, a pola A_i oraz A_{i+1} leżą w jednej kolumnie (rys. 9). W rezultacie ciąg $(A_i,A_{i+1},\ldots,A_{k-1},A_k)$ jest ciągiem cyklicznym złożonym z wyróżnionych pól, skąd znów wynika istnienie poszukiwanego zbioru parzystego.

To kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

Zadanie **9.** Na płaszczyźnie ustawiono po jednym kamieniu w punktach o współrzędnych $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i $(1,1)$. W jednym ruchu wybieramy dowolny kamień i przestawiamy go symetrycznie względem któregoś z pozostałych kamieni. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie mogą znaleźć się na jednej prostej.

Rozwiązanie

Sposób I

Wykażemy za pomocą indukcji następujące stwierdzenie: Po wykonaniu skończonego ciągu ruchów otrzymujemy takie rozstawienie czterech kamieni w punktach o obu współrzędnych całkowitych, że dowolne trzy kamienie są wierzchołkami niezdegenerowanego trójkąta, którego pole jest równe połowie nieparzystej liczby całkowitej. To pociągnie za sobą przeczącą odpowiedź na pytanie postawione w treści zadania.

W początkowej pozycji dowolne trzy kamienie tworzą trójkąt o polu $\frac{1}{2}$. Przypuśćmy z kolei, że przed wykonaniem ruchu rozważane cztery kamienie znajdują się w takich punktach A, B, C, D o obu współrzędnych całkowitych, że pole każdego z trójkątów ABC, BCD, CDA, DAB jest równe połowie nieparzystej liczby całkowitej. Niech ruch polega na przestawieniu kamienia stojącego w punkcie A symetrycznie względem punktu B do punktu A'. Należy udowodnić, że punkt A' ma współrzędne całkowite, a pole każdego z trójkątów $A'BC$, CDA' i $DA'B$ jest połową nieparzystej liczby całkowitej.

Punkt B jest środkiem odcinka AA', a punkt C leży poza prostą AB. Zatem punkt B jest środkiem boku AA' trójkąta $AA'C$, co oznacza, że trójkąty ABC i $A'BC$ mają jednakowe pola, równe połowie pola trójkąta $AA'C$. Analogicznie uzasadniamy, że trójkąty DAB i $DA'B$ mają jednakowe pola. Wobec tego na podstawie założenia indukcyjnego pole każdego z trójkątów $A'BC$ i $DA'B$ jest połową nieparzystej liczby całkowitej.

Pozostaje udowodnić, że punkt A' ma obie współrzędne całkowite, a pole trójkąta CDA' jest połową nieparzystej liczby całkowitej.

Oznaczmy współrzędne punktów A, B, C, D i A' odpowiednio przez (x,y), (z,t), (x_1,y_1), (x_2,y_2) i (x',y'). Cztery pierwsze z tych punktów mają współrzędne całkowite. Ponadto punkt B jest środkiem odcinka AA', skąd uzyskujemy zależności $\frac{1}{2}(x+x')=z$ oraz $\frac{1}{2}(y+y')=t$. W efekcie współrzędne punktu A', równe $(x',y')=(2z-x,2t-y)$, są liczbami całkowitymi.

Skorzystamy teraz ze wzoru wyznacznikowego na pole trójkąta. Orzeka on, że dla dowolnych trzech punktów P, Q, R o współrzędnych odpowiednio (p_x,p_y), (q_x,q_y), (r_x,r_y) pole trójkąta PQR wyraża się wzorem

$$\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} q_x-p_x & r_x-p_x \\ q_y-p_y & r_y-p_y \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(q_x-p_x)(r_y-p_y)-(q_y-p_y)(r_x-p_x)|.$$

W takim razie pole trójkąta CDA jest równe $\frac{1}{2}|M|$, gdzie

$$M=(x_2-x_1)(y-y_1)-(y_2-y_1)(x-x_1),$$

a pole trójkąta CDA' wynosi $\frac{1}{2}|N|$, gdzie

$$N=(x_2-x_1)(y'-y_1)-(y_2-y_1)(x'-x_1).$$

Na mocy założenia indukcyjnego liczba M jest nieparzysta. Natomiast suma

$$M+N=2(x_2-x_1)(t-y_1)-2(y_2-y_1)(z-x_1)$$

jest liczbą parzystą. W rezultacie liczba N jest nieparzysta. Wykazaliśmy w ten sposób, że pole trójkąta CDA' jest równe połowie nieparzystej liczby całkowitej, co kończy rozwiązanie.

Sposób II

Udowodnimy, że nie jest to możliwe. Przypuśćmy w tym celu, że po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie znalazły się na jednej prostej.

Dla dowolnych dwóch punktów o obu współrzędnych całkowitych punkt symetryczny do pierwszego punktu względem drugiego punktu również ma obie współrzędne całkowite. Zatem nie tylko w początkowym ustawieniu, ale także po wykonaniu każdego ruchu wszystkie cztery kamienie znajdują się w punktach o obu współrzędnych całkowitych. Istnieje więc prosta ℓ, na której po wykonaniu rozważanego ciągu ruchów leżą trzy kamienie, i przechodząca przez dwa różne punkty o obu współrzędnych całkowitych — niezależnie od tego, czy te trzy kamienie znajdują się w jednym punkcie, czy też nie.

Przyjmijmy, że prosta ℓ przechodzi przez dwa różne punkty o współrzędnych całkowitych (u_1,w_1) i (u_2,w_2). Prosta ta jest wówczas zbiorem punktów o współrzędnych (x,y) spełniających równanie

$$(w_2-w_1)(x-u_1)=(u_2-u_1)(y-w_1),$$

czyli równanie $Ax+By=C$, gdzie liczby całkowite A, B i C są zadane wzorami

$$A=w_2-w_1, \qquad B=-(u_2-u_1) \qquad \text{oraz} \qquad C=Au_1+Bw_1.$$

Ponadto co najmniej jedna z liczb A i B jest różna od zera, gdyż punkty o współrzędnych (u_1,w_1) i (u_2,w_2) są różne.

W myśl związku $C=Au_1+Bw_1$ dowolny wspólny dzielnik liczb A i B jest także dzielnikiem liczby C. Dzieląc więc liczby A, B i C przez największy wspólny dodatni dzielnik liczb A i B otrzymujemy odpowiednio pewne liczby całkowite a, b i c. Co więcej, prosta ℓ jest zbiorem punktów o współrzędnych (x,y) związanych zależnością $ax+by=c$. Z drugiej strony, liczby a i b są względnie pierwsze, co oznacza, że przynajmniej jedna z nich jest nieparzysta.

Pomalujmy każdy punkt płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych na czarno albo na biało w następujący sposób: każdy punkt o współrzędnych (x,y), dla którego liczba $ax+by$ jest parzysta, malujemy na biało, a wszystkie pozostałe punkty — na czarno. Na mocy ostatniego zdania poprzedniego akapitu wśród liczb a, b, $a+b$ dokładnie dwie liczby są nieparzyste. Wynika stąd, że w początkowym ustawieniu kamieni pewne dwa kamienie znajdują się w punktach białych, a pozostałe dwa — w punktach czarnych.

Punktem symetrycznym do punktu o współrzędnych całkowitych (x,y) względem punktu o współrzędnych całkowitych (z,t) jest punkt o współrzędnych (x',y') spełniających równości $\frac{1}{2}(x+x')=z$ i $\frac{1}{2}(y+y')=t$. Z zależności tych dostajemy związek

$$ax'+by'=a(2z-x)+b(2t-y)=2(az+bt)-(ax+by).$$

W efekcie liczby $ax+by$ i $ax'+by'$ są obie parzyste albo obie nieparzyste. To zaś dowodzi, że w każdym ruchu przestawiamy wybrany kamień z pewnego punktu do punktu o tym samym kolorze.

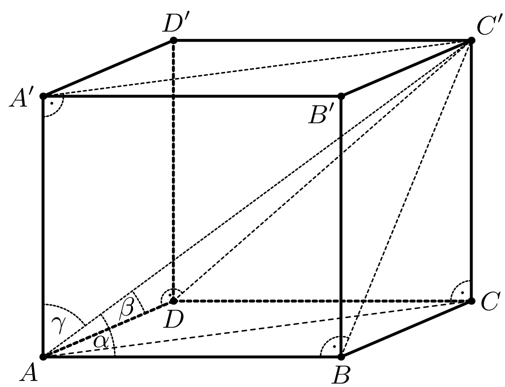
Łącząc stwierdzenia uzyskane w dwóch poprzednich akapitach wnioskujemy, że po dowolnej liczbie ruchów dwa kamienie znajdują się w punktach białych, a pozostałe dwa — w punktach czarnych. Jednak wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych leżące na prostej ℓ zadanej równaniem $ax+by=c$ mają jednakowy kolor. Wobec tego żadne trzy kamienie nie mogą jednocześnie znaleźć się na prostej ℓ, wbrew uczynionemu założeniu.

Odpowiedź: W wyniku wykonywania opisanych ruchów trzy kamienie nie mogą znaleźć się na jednej prostej.

Zadanie **10.** Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Niech α, β i γ będą kątami utworzonymi przez przekątną AC' z krawędziami AB, AD i AA'. Udowodnić, że

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma \leqslant \tfrac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma. \tag{1}$$

Rozwiązanie



rys. 10

Kąty ostre $\alpha=\sphericalangle C'AB$, $\beta=\sphericalangle C'AD$ i $\gamma=\sphericalangle C'AA'$ odpowiednio w trójkątach prostokątnych ABC', ADC' i $AA'C'$ spełniają zależności (rys. 10)

$$\cos\alpha=\frac{AB}{AC'},\qquad \cos\beta=\frac{AD}{AC'}\qquad \text{oraz}\qquad \cos\gamma=\frac{AA'}{AC'}. \tag{2}$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych ACC' i ABC otrzymujemy równości

$$AC'^2=AC^2+CC'^2=AC^2+AA'^2=AB^2+BC^2+AA'^2=AB^2+AD^2+AA'^2,$$

które po obustronnym podzieleniu przez AC'^2 i zastosowaniu zależności (2) prowadzą do związku

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{3}$$

Mnożąc obie strony dowodzonej nierówności (1) przez liczbę dodatnią $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma$ uzyskujemy do wykazania równoważną nierówność

$$\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \leqslant \tfrac{3}{2}. \tag{4}$$

Dla dowolnych liczb dodatnich x i y prawdziwa jest zależność $0 \leqslant \frac{1}{2}(x-y)^2$, czyli zależność $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Stąd dostajemy

$$\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\beta} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma} + \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta}\right). \tag{5}$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma}\right) \tag{6}$$

oraz

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta} + \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}\right). \tag{7}$$

Dodając stronami nierówności (5), (6) i (7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \leqslant \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\gamma+\cos^2\alpha}{\sin^2\beta} + \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Na mocy związku (3) każdy z trzech ułamków w nawiasie po prawej stronie zależności (8) jest równy 1. To dowodzi nierówności (4) i kończy rozwiązanie.

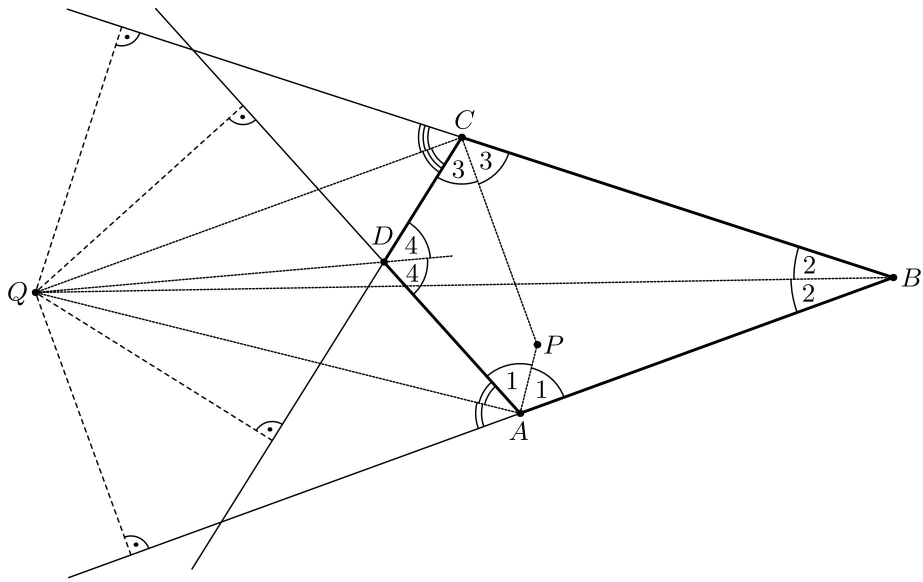
Zadanie **11.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P, a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że punkt jest jednakowo odległy od dwóch przecinających się prostych wtedy i tylko wtedy, gdy leży on na dwusiecznej jednego z czterech kątów wypukłych, na które te dwie proste dzielą płaszczyznę.

Punkt P leży na prostej zawierającej dwusieczną kąta wewnętrznego A (rys. 11). Jeżeli więc kąt PAQ jest prosty, to punkt Q leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku A. Wynika stąd, że odległości punktu Q od prostych DA i AB są równe.

Z drugiej strony, punkt Q leży na prostych zawierających dwusieczne kątów wewnętrznych B oraz D. W takim razie punkt ten jest jednakowo odległy od prostych AB i BC oraz jednakowo odległy od prostych CD i DA. To wraz z ostatnim zdaniem poprzedniego akapitu dowodzi, że odległości punktu Q od wszystkich czterech prostych zawierających boki czworokąta $ABCD$ są równe. Zatem punkt Q jest jednakowo odległy od prostych BC i CD, czyli leży on albo na prostej zawierającej dwusieczną kąta wewnętrznego C, albo też na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy tym wierzchołku.



rys. 11

Przypuśćmy, że punkt Q leży na prostej zawierającej dwusieczną kąta wewnętrznego C. W myśl warunków zadania leży on wówczas na każdej z trzech prostych zawierających odpowiednio dwusieczne kątów wewnętrznych B, C i D. Jednak dwusieczne kątów wewnętrznych B i C przecinają się w punkcie leżącym po tych samych stronach prostych AB i CD, co wnętrze czworokąta $ABCD$. Podobnie dwusieczne kątów wewnętrznych C i D przecinają się w punkcie leżącym po tych samych stronach prostych BC i DA, co wnętrze czworokąta $ABCD$. Wobec tego punkt Q znajduje się wewnątrz danego czworokąta, a to stoi w sprzeczności z faktem, że punkt ten leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku A.

W konsekwencji punkt Q leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C. Stąd prosta CQ jest prostopadła do prostej zawierającej dwusieczną kąta wewnętrznego C. A ponieważ na tej ostatniej prostej leży punkt P, więc kąt PCQ jest prosty, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **12.** Zbadać, czy istnieje liczba całkowita większa od 2012^{2012}, której nie można przedstawić w postaci $x^2+y^3+z^6$, gdzie x, y i z są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie

Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Weźmy pod uwagę trójki dodatnich liczb całkowitych (x,y,z), dla których

$$x^2+y^3+z^6 \leqslant n^6.$$

Jeżeli dodatnie liczby całkowite x, y i z spełniają powyższą zależność, to każdy z trzech składników jej lewej strony jest mniejszy od n^6. Wynika stąd, że $x < n^3$, $y < n^2$ oraz $z < n$. Zatem liczby x, y i z przyjmują odpowiednio jedną spośród n^3-1, n^2-1 i $n-1$ możliwych wartości. Wobec tego liczba rozpatrywanych trójek (x,y,z) nie przekracza iloczynu

$$(n^3-1)(n^2-1)(n-1) = (n^3-1)(n^3-n^2-n+1) = n^6-n^5-n^4+n^2+n-1.$$

Udowodniliśmy więc, że istnieje co najwyżej $n^6-(n^5+n^4-n^2-n+1)$ trójek dodatnich liczb całkowitych (x,y,z), dla których wyrażenie $x^2+y^3+z^6$ nie przekracza liczby n^6. To dowodzi, że w zbiorze $\{1,2,3,\ldots,n^6\}$ istnieje co najmniej $n^5+n^4-n^2-n+1$ elementów, których nie można przedstawić w postaci $x^2+y^3+z^6$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x, y i z. Największy wśród tych elementów wynosi zaś co najmniej $n^5+n^4-n^2-n+1$.

W efekcie dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ istnieje liczba całkowita nie mniejsza od $n^5+n^4-n^2-n+1$, której nie można przedstawić w postaci opisanej w treści zadania. Jednocześnie dla dostatecznie dużych dodatnich liczb całkowitych n prawdziwa jest nierówność $n^5+n^4-n^2-n+1 > 2012^{2012}$, gdyż jej lewa strona jest wielomianem zmiennej n o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze zmiennej. To pociąga za sobą twierdzącą odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie.

Odpowiedź: Taka liczba istnieje.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`