LXIV Olimpiada Matematyczna

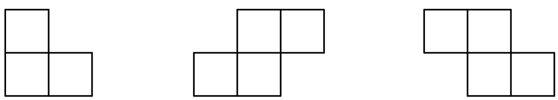
Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2013 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dane są liczby całkowite b i c oraz trójmian $f(x)=x^2+bx+c$. Udowodnić, że jeżeli dla pewnych liczb całkowitych k_1, k_2 i k_3 wartości $f(k_1)$, $f(k_2)$ i $f(k_3)$ są podzielne przez liczbę całkowitą n różną od zera, to również iloczyn $(k_1-k_2)(k_2-k_3)(k_3-k_1)$ jest podzielny przez n.

2. Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2 przecinają się w dwóch różnych punktach A i B, przy czym kąt O_1AO_2 jest rozwarty. Prosta O_1B przecina okrąg o_2 w punkcie C różnym od B, a prosta O_2B przecina okrąg o_1 w punkcie D różnym od B. Wykazać, że punkt B jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD.

3. Mamy do dyspozycji płytki o następujących kształtach:



Dla każdej liczby nieparzystej $n\geqslant 7$ wyznaczyć najmniejszą liczbę takich płytek potrzebnych do ułożenia kwadratu o boku n.

(*Uwaga:* Płytki można obracać, ale nie mogą one na siebie zachodzić.)

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2013 r. (drugi dzień zawodów)

4. Rozwiązać równanie

$$(x^4+3y^2)\sqrt{|x+2|+|y|}=4|xy^2|$$

w liczbach rzeczywistych x, y.

5. Dany jest taki wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej pary różnych liczb wymiernych r_1, r_2 prawdziwa jest zależność $W(r_1)\neq W(r_2)$. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że dla dowolnej pary różnych liczb rzeczywistych t_1, t_2 prawdziwa jest zależność $W(t_1)\neq W(t_2)$.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie czworościany $\mathcal{T}$ oraz $\mathcal{T}'$, o ścianach odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S_1', S_2', S_3', S_4', że

dla $i=1,2,3,4$ trójkąt S_i jest podobny do trójkąta S_i',

ale mimo to czworościan $\mathcal{T}$ nie jest podobny do czworościanu $\mathcal{T}'$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.