LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2013 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Dane są liczby całkowite b i c oraz trójmian $f(x)=x^2+bx+c$. Udowodnić, że jeżeli dla pewnych liczb całkowitych k_1, k_2 i k_3 wartości $f(k_1)$, $f(k_2)$ i $f(k_3)$ są podzielne przez liczbę całkowitą n różną od zera, to również iloczyn $(k_1-k_2)(k_2-k_3)(k_3-k_1)$ jest podzielny przez n.

Rozwiązanie

Sposób I

Określmy liczby całkowite A, B i C następującymi wzorami:

$$A=k_1^2(k_2-k_3)+k_2^2(k_3-k_1)+k_3^2(k_1-k_2),$$
$$B=bk_1(k_2-k_3)+bk_2(k_3-k_1)+bk_3(k_1-k_2),$$
$$C=c(k_2-k_3)+c(k_3-k_1)+c(k_1-k_2).$$

Dodając odpowiednie składniki prawych stron otrzymujemy zależność

$$A+B+C=f(k_1)(k_2-k_3)+f(k_2)(k_3-k_1)+f(k_3)(k_1-k_2),$$

w której prawa strona jest sumą trzech iloczynów podzielnych przez n. Zatem suma $A+B+C$ jest podzielna przez n. Z drugiej strony, wymnażając nawiasy we wzorach definiujących liczby B i C oraz przeprowadzając redukcję wyrazów podobnych stwierdzamy, że $B=C=0$. Stąd wniosek, że liczba A jest podzielna przez n. Do zakończenia rozwiązania pozostaje obliczyć, że

$$\begin{aligned}(k_1-k_2)(k_2-k_3)(k_3-k_1)&=(k_1-k_2)[k_3(k_1+k_2)-k_1k_2-k_3^2]=\\&=k_3(k_1^2-k_2^2)-k_1^2k_2+k_1k_2^2-k_3^2(k_1-k_2)=\\&=-k_1^2(k_2-k_3)-k_2^2(k_3-k_1)-k_3^2(k_1-k_2)=-A.\end{aligned}$$

Sposób II

Aby wykazać podzielność liczby $M=(k_1-k_2)(k_2-k_3)(k_3-k_1)$ przez n, należy uzasadnić, że każda liczba pierwsza występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n z wykładnikiem nie większym, niż w rozkładzie liczby M.

Niech więc liczba pierwsza p występuje w rozkładach liczb k_1-k_2, k_2-k_3, k_3-k_1 i n odpowiednio z wykładnikami x, y, z i t. Wówczas dowodzona teza staje się nierównością $x+y+z\geqslant t$. Jeżeli którakolwiek z liczb x, y, z wynosi co najmniej t, to nierówność ta jest spełniona. Przyjmijmy zatem, że wszystkie te trzy liczby są mniejsze od t. W myśl warunków zadania różnica

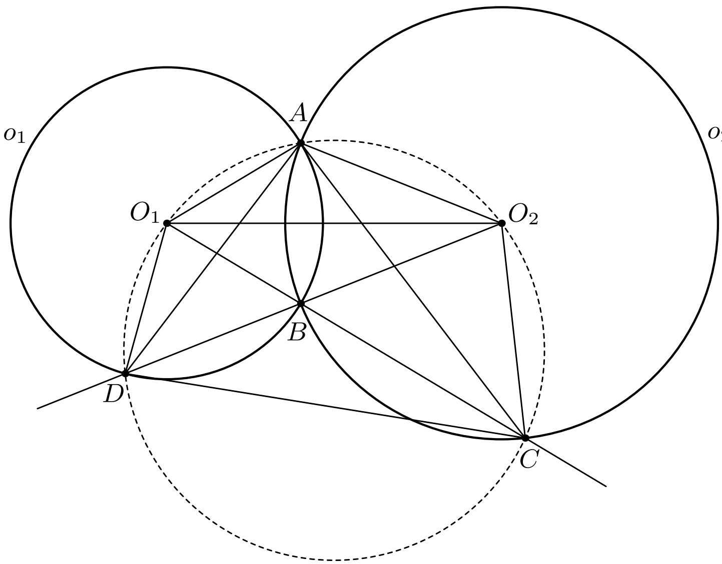
$$f(k_1)-f(k_2)=k_1^2-k_2^2+b(k_1-k_2)=(k_1+k_2+b)(k_1-k_2)$$

jest podzielna przez n i tym bardziej przez p^t. Ponadto drugi czynnik iloczynu stojącego po prawej stronie jest podzielny przez p^x, ale nie przez p^{x+1}.

Wobec tego czynnik k_1+k_2+b jest podzielny przez p^{t-x}. Analogicznie uzasadniamy, że liczba k_2+k_3+b jest podzielna przez p^{t-y}. W konsekwencji różnica $(k_2+k_3+b)-(k_1+k_2+b)=k_3-k_1$ jest podzielna przez $p^{\min\{t-x,t-y\}}$. Stąd i z określenia liczby z uzyskujemy związek $z \geqslant \min\{t-x,t-y\}=t-\max\{x,y\}$. W rezultacie $x+y+z \geqslant \max\{x,y\}+z \geqslant t$, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **2.** Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2 przecinają się w dwóch różnych punktach A i B, przy czym kąt O_1AO_2 jest rozwarty. Prosta O_1B przecina okrąg o_2 w punkcie C różnym od B, a prosta O_2B przecina okrąg o_1 w punkcie D różnym od B. Wykazać, że punkt B jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD.

Rozwiązanie



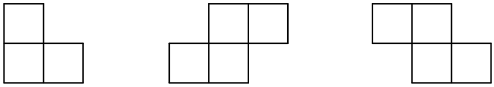
rys. 1

Ponieważ kąt O_1BO_2 jest rozwarty, więc punkt B leży wewnątrz odcinka O_1C, a punkt C leży na zewnątrz okręgu o_1 (rys. 1). Stąd i z zależności pomiędzy kątem wpisanym i kątem środkowym otrzymujemy

$$\sphericalangle ACO_1 = \sphericalangle ACB = \tfrac{1}{2} AO_2B = \sphericalangle AO_2O_1.$$

Zatem punkty A, O_1, C, O_2 leżą na pewnym okręgu o. Podobnie dowodzimy, że punkty A, O_2, D, O_1 leżą na pewnym okręgu o'. Jednak okręgi o i o' mają trzy różne punkty wspólne: A, O_1 oraz O_2. W efekcie okręgi te pokrywają się, czyli punkt D leży na okręgu o. Na mocy równości $O_1A=O_1D$ punkt O_1 jest środkiem łuku AD tego okręgu. Stąd wniosek, że punkt O_1 — a co za tym idzie, również punkt B — leży na dwusiecznej kąta wpisanego ACD. W analogiczny sposób stwierdzamy, że punkt B leży na dwusiecznej kąta ADC i wobec tego jest on środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD.

Zadanie **3.** Mamy do dyspozycji płytki o następujących kształtach:

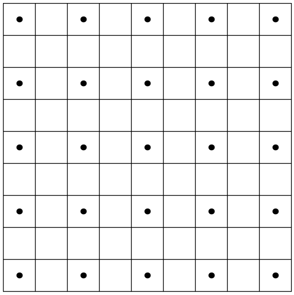


Dla każdej liczby nieparzystej $n \geqslant 7$ wyznaczyć najmniejszą liczbę takich płytek potrzebnych do ułożenia kwadratu o boku n.

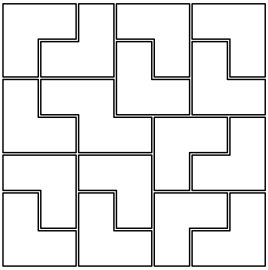
(*Uwaga:* Płytki można obracać, ale nie mogą one na siebie zachodzić.)

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że z danych płytek zbudowano kwadrat, którego bok ma długość nieparzystą $n \geqslant 7$. Podzielmy ten kwadrat liniami równoległymi do boków na n^2 kwadratów jednostkowych, uzyskując n wierszy i n kolumn. Następnie wyróżnijmy wszystkie te kwadraty jednostkowe, które znajdują się na przecięciu wiersza i kolumny o numerach nieparzystych (rys. 2). Ponieważ istnieje $\frac{1}{2}(n+1)$ wierszy oraz $\frac{1}{2}(n+1)$ kolumn o numerach nieparzystych, więc łącznie wyróżnimy w ten sposób $\frac{1}{4}(n+1)^2$ kwadratów. Ponadto każda płytka składa się z 3 albo 4 kwadratów jednostkowych, z których co najwyżej jeden jest wyróżniony. W konsekwencji liczba użytych płytek nie może być mniejsza od liczby wyróżnionych kwadratów, czyli od $\frac{1}{4}(n+1)^2$.



rys. 2



rys. 3

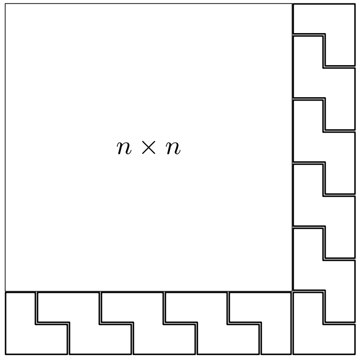
Wykażemy teraz za pomocą indukcji, że dla każdej liczby nieparzystej $n \geqslant 7$ kwadrat o boku n można zbudować z $\frac{1}{4}(n+1)^2$ płytek.

Kwadrat o boku 7 ułożony z 16 płytek przedstawiony jest na rys. 3.

Przyjmijmy z kolei, że dla pewnej liczby nieparzystej $n \geqslant 7$ mamy dany kwadrat o boku n ułożony z $\frac{1}{4}(n+1)^2$ płytek. Wówczas możemy do niego dobudować dodatkowe dwa wiersze i dwie kolumny w sposób przedstawiony na rys. 4. Dwie ostatnie kolumny zawierają wtedy $\frac{1}{2}(n+3)$ nowych płytek, a dwa ostatnie wiersze bez czterech pól leżących w dwóch ostatnich kolumnach zawierają $\frac{1}{2}(n+1)$ nowych płytek. Zatem liczba płytek w powstałym kwadracie o boku $n+2$ jest równa

$$\frac{1}{4}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+3)+\frac{1}{2}(n+1)=\frac{1}{4}[(n+1)^2+(2n+6)+(2n+2)]=\frac{1}{4}(n+3)^2,$$

co kończy indukcję i rozwiązanie zadania.



rys. 4

Odpowiedź: Szukana najmniejsza liczba płytek wynosi $\frac{1}{4}(n+1)^2$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2013 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Rozwiązać równanie

$$(x^4+3y^2)\sqrt{|x+2|+|y|}=4|xy^2| \tag{1}$$

w liczbach rzeczywistych x, y.

Rozwiązanie

Z zależności $|x+2|+|y| \geqslant |y|$ otrzymujemy nierówność

$$(x^4+3y^2)\sqrt{|x+2|+|y|} \geqslant (x^4+3y^2)\sqrt{|y|}, \tag{2}$$

która staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x^4+3y^2=0$ lub $|x+2|=0$, czyli gdy $x=y=0$ lub $x=-2$.

Z drugiej strony, na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną nieujemnych liczb rzeczywistych uzyskujemy

$$x^4+3y^2=x^4+y^2+y^2+y^2 \geqslant 4\sqrt[4]{x^4\cdot y^2\cdot y^2\cdot y^2}=4|xy|\sqrt{|y|}, \tag{3}$$

a ponadto lewa strona zależności (3) jest równa prawej stronie wtedy i tylko wtedy, gdy $x^4=y^2$, czyli gdy $x^2=|y|$. Zatem

$$(x^4+3y^2)\sqrt{|y|} \geqslant 4|xy^2|, \tag{4}$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2=|y|$ lub $y=0$.

Łącząc związki (2) i (4) widzimy, że lewa strona równania (1) jest zawsze nie mniejsza niż prawa strona, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(x=y=0 \quad \text{lub} \quad x=-2) \qquad \text{oraz} \qquad (x^2=|y| \quad \text{lub} \quad y=0).$$

Stąd bez trudu wyznaczamy wszystkie rozwiązania (x,y) danego równania:

$$(\mathbf{0},\mathbf{0}), \quad (-\mathbf{2},\mathbf{0}), \quad (-\mathbf{2},\mathbf{4}) \quad \text{oraz} \quad (-\mathbf{2},-\mathbf{4}).$$

Zadanie **5.** Dany jest taki wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej pary różnych liczb wymiernych r_1, r_2 prawdziwa jest zależność $W(r_1)\neq W(r_2)$. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że dla dowolnej pary różnych liczb rzeczywistych t_1, t_2 prawdziwa jest zależność $W(t_1)\neq W(t_2)$.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że implikacja sformułowana w treści zadania jest fałszywa dla wielomianu $W(x)=x^3-2x$. Zauważmy najpierw, że $W(0)=W(\sqrt{2})=0$. Niech z kolei r_1 i r_2 będą dowolnymi liczbami wymiernymi, dla których $W(r_1)=W(r_2)$. Zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykażemy, że $r_1=r_2$.

Przypuśćmy w tym celu, że $r_1 \neq r_2$. Wówczas z równości

$$0 = W(r_1) - W(r_2) = (r_1^3 - r_2^3) - 2(r_1 - r_2) = (r_1 - r_2)(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - 2)$$

otrzymujemy związek

$$r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 = 2. \tag{1}$$

Sprowadźmy liczby wymierne r_1 i r_2 do najmniejszego wspólnego mianownika, uzyskując przedstawienia

$$r_1 = \frac{k}{n} \qquad \text{oraz} \qquad r_2 = \frac{m}{n}, \tag{2}$$

w których k i m są liczbami całkowitymi, a n jest dodatnią liczbą całkowitą. Podstawiając wzory (2) do zależności (1) dostajemy

$$k^2 + km + m^2 = 2n^2. \tag{3}$$

Gdyby liczby k i m były parzyste, to każdy składnik lewej strony związku (3) byłby podzielny przez 4. W konsekwencji liczba $2n^2$ byłaby podzielna przez 4, skąd wynikałaby parzystość liczby n. Zatem ułamki stojące po prawych stronach równości (2) miałyby parzyste liczniki i mianowniki, wbrew temu, że liczba n jest najmniejszym wspólnym mianownikiem liczb wymiernych r_1 i r_2. Co najmniej jedna z liczb k i m jest więc nieparzysta. Stąd — w zależności od tego, czy obie te liczby są nieparzyste, czy też nie — lewa strona związku (3) jest sumą trzech liczb nieparzystych albo jednej nieparzystej i dwóch parzystych, czyli jest nieparzysta. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie.

Odpowiedź: Nie.

Zadanie **6.** Rozstrzygnąć, czy istnieją takie czworościany $\mathcal{T}$ oraz $\mathcal{T}'$, o ścianach odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S_1', S_2', S_3', S_4', że

dla $i = 1, 2, 3, 4$ trójkąt S_i jest podobny do trójkąta S_i',

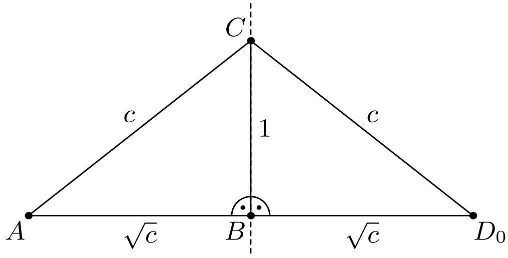
ale mimo to czworościan $\mathcal{T}$ nie jest podobny do czworościanu $\mathcal{T}'$.

Rozwiązanie

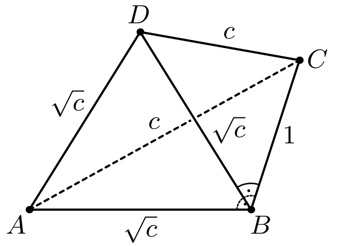
Wykażemy, że takie dwa czworościany istnieją. Opiszemy jeden z wielu możliwych przykładów.

Liczba $c = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ jest pierwiastkiem równania $1+c=c^2$ większym od 1. Wobec tego istnieje trójkąt prostokątny o bokach długości 1, $\sqrt{c}$, c.

Umieśćmy na płaszczyźnie dwa takie trójkąty prostokątne o wspólnej przyprostokątnej długości 1. Oznaczmy ich wierzchołki w sposób wskazany na rys. 5. Następnie obróćmy w przestrzeni trójkąt BCD_0 wokół prostej BC o pewien kąt, uzyskując trójkąt BCD oraz czworościan $ABCD$. Ponieważ punkty A i D_0 są symetryczne względem prostej BC, więc dla odpowiednio dobranego kąta obrotu długość krawędzi AD tego czworościanu może być dowolnie wybraną liczbą dodatnią mniejszą od $AD_0 = 2\sqrt{c}$. Niech $\mathcal{T}$ będzie tak otrzymanym czworościanem $ABCD$, w którym $AD = \sqrt{c}$ (rys. 6).

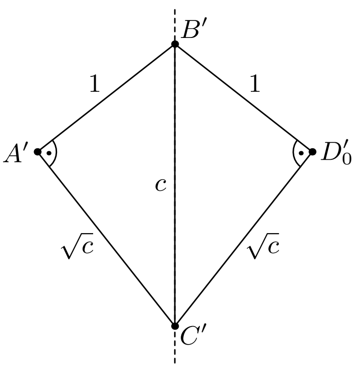


rys. 5

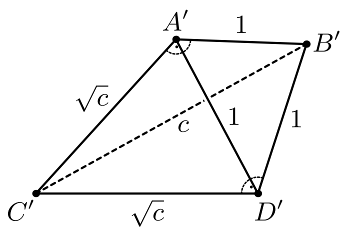


rys. 6

Umieśćmy teraz na płaszczyźnie dwa takie same trójkąty prostokątne, lecz tym razem o wspólnej przeciwprostokątnej; oznaczmy ich wierzchołki tak jak na rys. 7. Wówczas $A'D_0' = \frac{2}{\sqrt{c}} > 1$. Analogicznie uzasadniamy, że w wyniku obrotu trójkąta $B'C'D_0'$ wokół prostej $B'C'$ możemy dostać trójkąt $B'C'D'$ oraz czworościan $A'B'C'D'$, w którym $A'D' = 1$. Oznaczmy ten czworościan symbolem $\mathcal{T}'$ (rys. 8).



rys. 7



rys. 8

W tej sytuacji prawdziwe są następujące zależności:

- trójkąt ABC jest przystający do trójkąta $C'A'B'$;
- trójkąt BCD jest przystający do trójkąta $D'B'C'$;
- trójkąty ABD i $A'B'D'$ są równoboczne o bokach odpowiednio długości $\sqrt{c}$ i 1;
- trójkąt ACD ma boki o długościach c, c, $\sqrt{c}$, a trójkąt $A'C'D'$ ma boki o długościach $\sqrt{c}$, $\sqrt{c}$, 1 oraz oba te trójkąty są ostrokątne.

Zatem ściany ABC, ABD, ACD i BCD czworościanu $\mathcal{T}$ są podobne odpowiednio do ścian $C'A'B'$, $A'B'D'$, $A'C'D'$ i $D'B'C'$ czworościanu $\mathcal{T}'$; skale podobieństw wynoszą odpowiednio 1, $\sqrt{c}$, $\sqrt{c}$ i 1.

Natomiast czworościany $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ nie są podobne. Istotnie, kąty płaskie ABC i DBC przy wierzchołku B czworościanu $\mathcal{T}$ są proste. Czworościan $\mathcal{T}'$ nie ma zaś wierzchołka, w którym schodziłyby się dwa kąty proste, gdyż jedynymi kątami prostymi wśród 12 kątów wewnętrznych ścian tego czworościanu są kąty $B'A'C'$ i $B'D'C'$ przy wierzchołkach odpowiednio A' i D'.

To kończy rozwiązanie zadania.

Odpowiedź: Tak.
