LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

17 kwietnia 2013 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać równanie

$$x^4 + y = x^3 + y^2$$

w liczbach całkowitych x, y.

2. Dane są takie liczby całkowite a i b, że $a \neq 0$ oraz liczba $3+a+b^2$ jest podzielna przez $6a$. Wykazać, że liczba a jest ujemna.

3. Dany jest czworokąt $ABCD$, w który można wpisać okrąg. Odcinki AB, BC, CD i DA są średnicami odpowiednio okręgów o_1, o_2, o_3 i o_4. Dowieść, że istnieje okrąg styczny do każdego z okręgów o_1, o_2, o_3 i o_4.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2013 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym

$$AB = CD \quad \text{oraz} \quad \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Udowodnić, że $\angle BAD > \angle ADC$.

5. Niech k, m oraz n będą trzema różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że

$$\Big(k - \frac{1}{k}\Big)\Big(m - \frac{1}{m}\Big)\Big(n - \frac{1}{n}\Big) \le kmn - (k + m + n).$$

6. Dla każdej liczby całkowitej $n \ge 1$ wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów w przestrzeni, tworzących zbiór A o następujących własnościach:

(1) współrzędne każdego punktu zbioru A są liczbami całkowitymi z przedziału $\langle 0; n\rangle$;

(2) dla każdej pary różnych punktów (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) zbioru A spełniona jest co najmniej jedna z nierówności $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$, $x_3 < y_3$ oraz co najmniej jedna z nierówności $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $x_3 > y_3$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.