LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

17 kwietnia 2013 r. (pierwszy dzień zawodów)

Poprawiono 23 kwietnia 2013, godz. 19:02

1. Rozwiązać równanie

$$x^4 + y = x^3 + y^2 \tag{1}$$

w liczbach całkowitych x, y.

Rozwiązanie

Przepiszmy równanie (1) w równoważnej postaci

$$y^2 - y = x^4 - x^3. \tag{2}$$

Mnożąc obie strony zależności (2) przez 4 i dodając do nich 1 otrzymujemy

$$(2y-1)^2 = 4x^4 - 4x^3 + 1 = (2x^2 - x)^2 - (x^2 - 1) = (2x^2 - x - 1)^2 + (3x^2 - 2x).$$

Zatem liczba $4x^4 - 4x^3 + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej; jednocześnie zaś leży ona pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych całkowitych, o ile tylko liczby $x^2 - 1$ i $3x^2 - 2x$ są dodatnie. Wobec tego zależność (2) może być spełniona jedynie wtedy, gdy $x^2 - 1 \le 0$ lub $3x^2 - 2x \le 0$, czyli gdy $x \in \{-1, 0, 1\}$.

Podstawiając kolejno te trzy wartości niewiadomej x i rozwiązując uzyskane w ten sposób równania kwadratowe z niewiadomą y wyznaczamy następujące rozwiązania (x, y) równania (1):

$$(-1,-1), \quad (-1,2), \quad (0,0), \quad (0,1), \quad (1,0), \quad (1,1).$$

2. Dane są takie liczby całkowite a i b, że $a \neq 0$ oraz liczba $3 + a + b^2$ jest podzielna przez $6a$. Wykazać, że liczba a jest ujemna.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że $a > 0$. W myśl założeń istnieje liczba całkowita c, dla której $3 + a + b^2 = 6ac$. Lewa strona ostatniej zależności jest liczbą dodatnią, skąd $c > 0$. Zatem w równości $b^2 + 3 = a(6c - 1)$ drugi czynnik prawej strony daje resztę 5 z dzielenia przez 6, a więc liczba $b^2 + 3$ ma dzielnik pierwszy postaci $p = 6k - 1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k.

W tej sytuacji liczba $(b-1)^3 = (b-3)(b^2+3) + 8$ daje przy dzieleniu przez p tę samą resztę, co liczba $2^3 = 8$; w szczególności liczba $b - 1$ nie jest podzielna przez p. W oparciu o zależność $3(4k-1) = 2(p-1) + 1$ stwierdzamy, że liczby

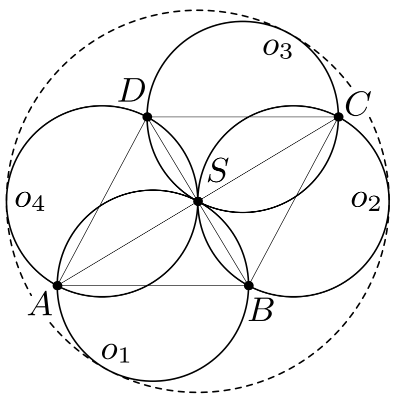
$$((b-1)^3)^{4k-1} = ((b-1)^{p-1})^2 \cdot (b-1) \ \text{ i } \ (2^3)^{4k-1} = (2^{p-1})^2 \cdot 2 \tag{1}$$

dają równe reszty z dzielenia przez p. Na mocy małego twierdzenia Fermata liczby $(b-1)^{p-1}$ i 2^{p-1} dają resztę 1 z dzielenia przez p. Związki (1) dowodzą więc, że liczby $b-1$ i 2 dają te same reszty z dzielenie przez p. W efekcie różnica $(b^2+3)-(b-3)(b+3)=12$ jest podzielna przez liczbę p dającą resztę 5 z dzielenia przez 6. Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie.

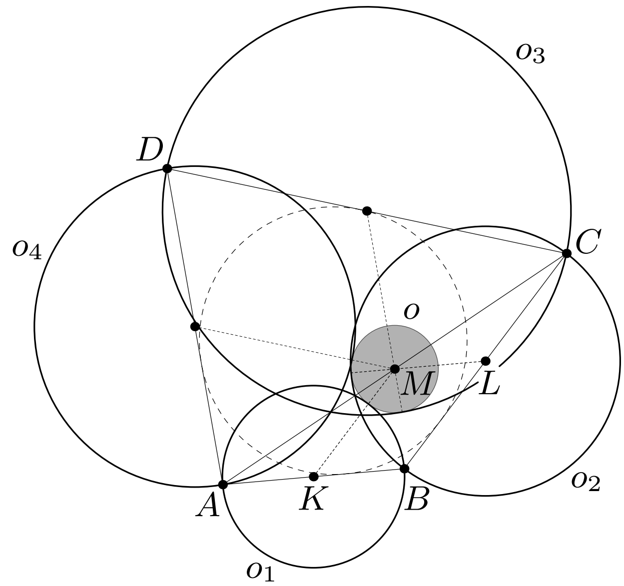
3. Dany jest czworokąt $ABCD$, w który można wpisać okrąg. Odcinki AB, BC, CD i DA są średnicami odpowiednio okręgów o_1, o_2, o_3 i o_4. Dowieść, że istnieje okrąg styczny do każdego z okręgów o_1, o_2, o_3 i o_4.

Rozwiązanie

Jeżeli dany czworokąt jest rombem, to okręgi mają średnice o jednakowej długości, powiedzmy d, i przechodzą przez S — środek symetrii rombu (rys. 1). Okrąg o środku S i promieniu d ma więc żądaną własność.



rys.1



rys.2

Przypuśćmy teraz, że nie wszystkie boki mają równe długości; przyjmijmy, nie tracąc ogólności rozważań, że $AB < BC$ (rys. 2). Oznaczmy symbolami K, L i M odpowiednio środki odcinków AB, BC i AC oraz określmy $r=\frac{1}{2}(BC-AB)$. Wówczas na podstawie równości

$$r+\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BC=KM \qquad \text{oraz} \qquad r-\frac{1}{2}BC=-\frac{1}{2}AB=-LM$$

stwierdzamy, że okrąg o o środku M i promieniu r jest styczny zewnętrznie do okręgu o_1 oraz wewnętrznie do okręgu o_2.

Jednak na mocy założenia o danym czworokącie prawdziwy jest związek $r=\frac{1}{2}(DC-AD)$. Zatem w wyniku analogicznego rozumowania dla środków odcinków AD, DC i AC dochodzimy do wniosku, że okrąg o jest styczny wewnętrznie do okręgu o_3 i zewnętrznie do okręgu o_4. Wobec tego okrąg o spełnia warunki zadania.

LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2013 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym

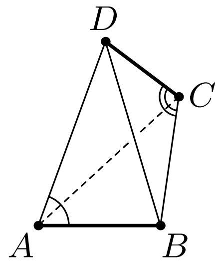
$$AB = CD \quad \text{oraz} \quad \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Udowodnić, że $\angle BAD > \angle ADC$.

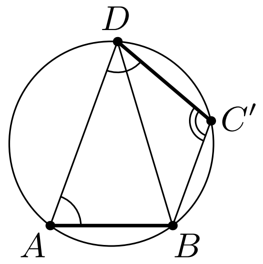
Rozwiązanie

Na płaszczyźnie ABD zbudujmy trójkąt $BC'D$ przystający do ściany BCD i leżący po przeciwnej stronie prostej BD niż trójkąt BAD (rys. 4). Wówczas z danych w treści zadania związków otrzymujemy:

$AB = C'D$ i $\angle BAD + \angle BC'D = 180^\circ$.



rys. 3



rys. 4

Zatem na czworokącie $ABC'D$ można opisać okrąg, a ponadto czworokąt ten jest trapezem równoramiennym o podstawach AD i BC'. Stąd i z nierówności trójkąta dla kąta trójściennego o wierzchołku D (rys. 3) uzyskujemy

$$\angle BAD = \angle ADC' = \angle ADB + \angle BDC' = \angle ADB + \angle BDC > \angle ADC.$$

5 Niech k, m oraz n będą trzema różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że

$$\left(k - \frac{1}{k}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right) \le kmn - (k + m + n).$$

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że czynniki lewej strony dowodzonej nierówności są liczbami nieujemnymi. Nie ograniczając ogólności rozumowania przyjmijmy, że n jest największą spośród danych trzech liczb. Wykażemy, że

(1) $\quad \left(k - \frac{1}{k}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right) \le km - 2 \quad \text{i} \quad (km-2)\left(n - \frac{1}{n}\right) \le kmn - (k+m+n).$

Wówczas łącząc powyższe dwie zależności otrzymamy tezę zadania.

Wymnażając czynniki lewej strony pierwszej spośród nierówności (1), redukując wyraz km i wreszcie mnożąc obustronnie przez km otrzymujemy równoważną postać $-k^2 - m^2 + 1 \le -2km$, czyli $1 \le (k - m)^2$. To zaś jest prawdą, gdyż k i m są różnymi liczbami całkowitymi.

Dowód drugiej z nierówności (1) przebiega analogicznie: wymnażamy czynniki lewej strony, redukujemy wyrazy kmn i $-n$, a na koniec mnożymy obustronnie przez n. Dostajemy równoważną postać $-n^2 - km + 2 \le$

$\leq -(k+m)n$, czyli $2 \leq (n-k)(n-m)$. Do zakończenia rozwiązania pozostaje przypomnieć, że $n-k$ oraz $n-m$ są różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rachunkowe rozwiązanie — kompilacja prac kilku finalistów

Niech

$$f(k,m,n) = 2kmn\Big(kmn - (k+m+n) - \big(k-\tfrac{1}{k}\big)\big(m-\tfrac{1}{m}\big)\big(n-\tfrac{1}{n}\big)\Big) =$$
$$= 2kmn\Big(\tfrac{km}{n} + \tfrac{mn}{k} + \tfrac{nk}{m} - k - m - n - \tfrac{k}{mn} - \tfrac{m}{nk} - \tfrac{n}{km} + \tfrac{1}{kmn}\Big) =$$
$$= 2k^2m^2+2m^2n^2+2n^2k^2-2k^2mn-2km^2n-2kmn^2-2k^2-2m^2-2n^2+2 =$$
$$= (km-kn)^2 + (mn-mk)^2 + (nk-nm)^2 - 2k^2 - 2m^2 - 2n^2 + 2 =$$
$$= k^2\big((m-n)^2-2\big) + m^2\big((n-k)^2-2\big) + n^2\big((k-m)^2-2\big) + 2\,.$$

Ze względu na symetrię można założyć bez straty ogólności, że $k > m > n$. Jeśli $k - m \geq 2$ i $m - n \geq 2$, to

$$f(k,m,n) \geq k^2\big(2^2-2\big) + m^2\big(2^2-2\big) + n^2\big(2^2-2\big) + 2 > 0,$$

co uzasadnia prawdziwość dowodzonej nierówności w tym przypadku.
Jeśli $m = n+1$, to zachodzą równości: $f(k,n+1,n) =$

$$= k^2 + (n+1)^2(k-n)^2 + n^2(k-n-1)^2 - 2k^2 - 2(n+1)^2 - 2n^2 + 2 =$$
$$= k^2\big(1+(n+1)^2+n^2-2\big) - 2k\big(n(n+1)^2 + n^2(n+1)\big) +$$
$$+ 2n^2(n+1)^2 - 2(n+1)^2 - 2n^2 + 2 =$$
$$= 2n(n+1)k^2 - 2n(n+1)(2n+1)k + 2(n^2-1)\big((n+1)^2-1\big) =$$
$$= 2n(n+1)\big(k^2-(2n+1)k+(n-1)(n+2)\big) = 2n(n+1)(k-n+1)(k-n-2).$$

Oczywiście $k > m$, więc $k \geq m+1 = n+2$ i wobec tego: $f(k,n+1,n) = 2n(n+1)(k-n+1)(k-n-2) \geq 0$.
Analogicznie prawdziwy jest wzór:

$$f(m+1,m,n) = 2m(m+1)(n-m+1)(n-m-2) =$$
$$= 2m(m+1)(m-n-1)(m+2-n) \geq 0.$$

Nierówność jest prawdziwa dla każdej trójki liczb całkowitych $k > m > n$.

6. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów w przestrzeni, tworzących zbiór A o następujących własnościach:

(1) współrzędne każdego punktu zbioru A są liczbami całkowitymi z przedziału $\langle 0; n\rangle$;

(2) dla każdej pary różnych punktów (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3) zbioru A spełniona jest co najmniej jedna z nierówności $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$, $x_3 < y_3$ oraz co najmniej jedna z nierówności $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $x_3 > y_3$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez S zbiór wszystkich $(n+1)^3$ punktów całkowitych z przedziału $\langle 0; n\rangle$. Niech ponadto m będzie najmniejszą liczbą całkowitą równą co najmniej $\frac{1}{2}n$; wtedy $n = 2m$ albo $n = 2m-1$.

Podzielimy zbiór S na mniejsze zbiory, z których każdy będzie mógł zawierać co najwyżej jeden punkt dowolnego zbioru A o własnościach (1) i (2).

Dla każdej pary liczb $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ i $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ niech $B_{k,\ell}$ będzie zbiorem wszystkich wyrazów następującego ciągu punktów zbioru S:

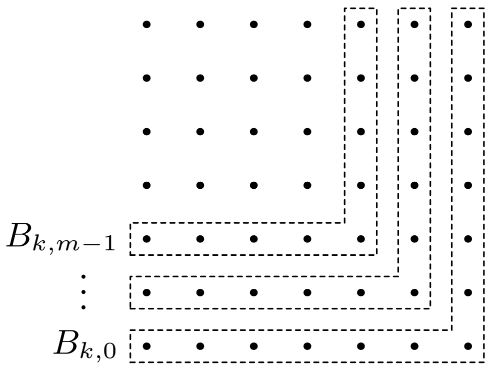
$$(0, \ell, k),\ (1, \ell, k),\ (2, \ell, k),\ \ldots, (n-\ell-1, \ell, k),\ (n-\ell,\ \ell,\ k),$$
$$(n-\ell, \ell+1, k),\ (n-\ell,\ \ell+2,\ k),\ \ldots, (n-\ell, n-1, k),\ (n-\ell, n, k).$$

Wszystkie punkty występujące w powyższym ciągu mają trzecią współrzędną równą k. Jeśli ponadto punkt (x_1,x_2,k) poprzedza punkt (y_1, y_2, k) w tym ciągu, to prawdziwe są nierówności $x_1 \le y_1$ i $x_2 \le y_2$, z których co najmniej jedna jest ostra. Stąd wniosek, że co najwyżej jeden wyraz tego ciągu może być elementem zbioru A.

Przy ustalonej wartości parametru $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ zbiory

$$B_{k,0},\ B_{k,1},\ B_{k,2},\ \ldots\ ,\ B_{k,m-1}$$

pokrywają łącznie wszystkie punkty zbioru S o trzeciej współrzędnej równej k z wyjątkiem punktów (x_1, x_2, k), w których $x_1 \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-m-1, n-m\}$ oraz $x_2 \in \{m, m+1, m+2, \ldots, n\}$. Dla każdej pary liczb $s \in \{0, 1, 2, \ldots, n-m\}$ oznaczmy teraz symbolem $C_{s,t}$ zbiór $n+1$ punktów postaci (s, t, x_3), gdzie $x_3 \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.



rys. 5

Również i tu co najwyżej jeden punkt ustalonego zbioru $C_{s,t}$ może należeć do zbioru A.

W ten sposób skonstruowaliśmy $(n+1)m$ zbiorów $B_{k,\ell}$ oraz $(n-m+1)^2$ zbiorów $C_{s,t}$. Łącznie stanowią one rozbicie zbioru S na

$$N = (n+1)m + (n-m+1)^2 \qquad (1)$$

zbiorów. W każdym z nich jest co najwyżej jeden punkt zbioru A. Wobec tego liczba punktów zbioru A nie przekracza N.

Wykażemy teraz, że dla każdego $n \ge 1$ istnieje zbiór o własnościach (1) i (2) oraz zawierający po jednym punkcie z każdego spośród rozważanych N zbiorów. W tym celu zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej w zbiór A_w wszystkich punktów $(x, y, z) \in S$ związanych równością $x + y + z = w$ spełnia warunki zadania. Wystarczy zatem tak dobrać wartość w, by zbiór A_w miał punkt wspólny z każdym zbiorem $B_{k,\ell}$ oraz z każdym zbiorem $C_{s,t}$.

Dla dowolnych liczb $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ oraz $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ sumy współrzędnych kolejnych punktów ciągu definiującego zbiór $B_{k,\ell}$ są kolejnymi liczbami całkowitymi. Pierwsza z tych sum wynosi $\ell + k$, czyli jest równa co najwyżej $n+m-1$; ostatnia zaś wynosi $2n-\ell+k$, a więc jest równa co najmniej $2n-m+1$. W konsekwencji zbiór A_w ma punkt wspólny z każdym zbiorem $B_{k,\ell}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$n+m-1 \le w \le 2n-m+1. \tag{2}$$

Podobnie rozumujemy dla zbioru $C_{s,t}$, gdzie $s \in \{0,1,2,\ldots,n-m\}$ oraz $t \in \{m, m+1, m+2, \ldots, n\}$: sumy współrzędnych kolejnych punktów zbioru $C_{s,t}$ tworzą ciąg kolejnych liczb całkowitych rozpoczynający się liczbą $s+t \le 2n-m$ i kończący się liczbą $s+t+n \ge n+m$. Stąd zbiór A_w ma punkt wspólny z każdym zbiorem $C_{s,t}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$2n-m \le w \le n+m. \tag{3}$$

Pozostaje stwierdzić, że nierówności (2) i (3) są spełnione: w przypadku $n=2m$ dla $w=3m$, a w przypadku $n=2m-1$ dla $w=3m-2$ i $w=3m-1$. W rezultacie przy tak wybranej wartości w zbiór $A=A_w$ liczy N punktów.

Na koniec wyznaczmy jednolity wzór wyrażający liczbę N w zależności od n. Przekształcając równość (1) otrzymujemy następujące wyniki:

$$N = (2m+1)m+(m+1)^2 = 3m^2+3m+1 = \frac{3}{4}(n+1)^2+\frac{1}{4}, \quad \text{gdy } n=2m,$$

oraz

$$N = 2m\cdot m + m^2 = 3m^2 = \frac{3}{4}(n+1)^2, \qquad \text{gdy } n=2m-1.$$

Zatem N jest najmniejszą liczbą całkowitą równą co najmniej $\frac{3}{4}(n+1)^2$.

Odpowiedź: Szukana największa możliwa liczba punktów zbioru A jest równa najmniejszej liczbie całkowitej nie mniejszej niż $\frac{3}{4}(n+1)^2$.

Roboczy szkic drugiego rozwiązania

Poniżej $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą z półprostej $[x,\infty)$. Zbiory *równoliczne* to zbiory o tej samej liczbie elementów. Kostka K to najmniejszy sześcian zawierający wszystkie punkty o współrzędnych całkowitych z przedziału $\langle 0; n\rangle$.

Zbiór o własnościach (1) i (2) nazwijmy *dobrym*. Symbole $m(A)$ i $M(A)$ oznaczają, odpowiednio, najmniejszą i największą wartość sumy $x+y+z$, gdy $(x,y,z)\in A$.

Lemat. Jeżeli A jest zbiorem dobrym, $m(A) < \frac{3}{2}n$, to istnieje taki zbiór dobry A', równoliczny z A, że zachodzą równości $m(A') = m(A)+1$ oraz $M(A') = \max\{M(A), m(A)+1\}$.

Najpierw wywnioskujemy twierdzenie z lematu. Niech A będzie zbiorem dobrym. Stosując lemat wielokrotnie, zwiększamy $m(\cdot)$ i dochodzimy do zbioru dobrego A^*, równolicznego z A, w którym $m(A^*) = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$, $M(A^*) = \max\{M(A), \lceil \frac{3}{2}n \rceil\}$.

Jeśli $M(A^*) = M(A) > \lceil \frac{3}{2}n \rceil$, to stosując (tyle razy ile trzeba) lemat do odbicia zbioru A^* w symetrii względem punktu $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ — środka kostki, zmniejszamy $M(\cdot)$ i otrzymujemy zbiór dobry A^{**}, w którym nadal $m(A^{**}) = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$, oraz także $M(A^{**}) = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$. (Jeśli zaś $M(A^*) = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$, przyjmujemy po prostu $A^{**} = A^*$). Zbiór A^{**} (równoliczny z A) cały leży w płaszczyźnie $x + y + z = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$.

Różnie można zliczyć punkty kostki, leżące w tej płaszczyźnie. Wynik: $\lceil \frac{3}{4}(n+1)^2 \rceil$. To odpowiedź na pytanie, bo wszystkie punkty tego przekroju tworzą zbiór dobry.

Dowód lematu. Niech $B = \{p = (x, y, z) \in A : \quad x + y + z = s\}$ oraz $m(A) = s < \frac{3}{2}n$. Określamy trzy zbiory: $B_1 = \{p \in B : \quad y \geq \frac{1}{3}s > z\}$, $B_2 = \{p \in B : \quad z \geq \frac{1}{3}s > x\}$, $B_3 = \{p \in B : \quad x \geq \frac{1}{3}s > y\}$. Są one rozłączne.

Niech $p_0 = (x, y, z) \in B \setminus (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$. Ponieważ $x+y+z = s$, więc zachodzi nierówność $\max(x, y, z) \geq \frac{1}{3}s$. Niech np. $x \geq \frac{1}{3}s$. Skoro $p_0 \notin B_3$, to $y \geq \frac{1}{3}s$; a skoro $p_0 \notin B_1$, to $z \geq \frac{1}{3}s$. To znaczy, że $x = y = z = \frac{1}{3}s$. Punkt p_0 istnieje więc wtedy i tylko wtedy, gdy liczba s dzieli się przez 3, i jest wówczas jedyny: $p_0 = (\frac{1}{3}s, \frac{1}{3}s, \frac{1}{3}s)$.

Określamy zbiór A', zastępując każdy punkt $p = (x, y, z) \in B$ punktem p', uzyskanym z p przez zwiększenie jednej współrzędnej o 1: jeśli $p \in B_i$ to zwiększamy i-tą współrzędną $(i = 1, 2, 3)$, jeśli zaś $p = p_0$, to którąkolwiek z trzech. Zbiór A jest dobry, więc $p' \notin A$. Punkty zbioru $A \setminus B$ włączamy do A' nie zmieniając ich.

Jasne, że $m(A') = s+1$. Jeżeli $M(A) > s$, to również $M(A') = M(A)$. Jeśli $M(A) = s$, to zachodzi równość $A = B$, więc $M(A') = m(A') = s + 1$.

Wykażemy, że zbiory A' i A mają tyle samo elementów. Wystarczy wykazać, że przyporządkowanie $p \mapsto p'$ jest różnowartościowe. Załóżmy, że $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in B_1$, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in B_2$, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in B_3$. Tym punktom przypisujemy punkty $(\bar{x}+1, \bar{y}, \bar{z}) \in A'$, $(\tilde{x}, \tilde{y}+1, \tilde{z}) \in A'$, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}+1) \in A'$. Są one różne, bo $\bar{z} < \frac{1}{3}\, s \leq \tilde{z}$, $\tilde{x} < \frac{1}{3}\, s \leq \hat{x}$, $\hat{y} < \frac{1}{3}\, s \leq \bar{y}$, Są one też różne od punktu p_0' (jeśli on istnieje).

Wykażemy, że zbiór A' jest dobry. Najpierw wykażemy, że $A' \subset K$. Przypuśćmy, że punkt p', uzyskany z $p = (x, y, z) \in B$, znalazł się poza kostką. Niech np. $p \in B_1$. Wtedy $p' = (x + 1, y, z)$ i $x+1 > n$, więc $x = n$. Z definicji zbioru B_1 i z założenia $s < \frac{3}{2}n$ wynika, że $s = n + y + z \geq$ $\geq n + \frac{1}{3}s + 0 > \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}s = s$. Sprzeczność, zatem $p' \in K$. Również p_0' jest punktem kostki, bo $\frac{1}{3}\, s < \frac{1}{2}\, n < n$.

Teraz zajmiemy się warunkiem (2). Załóżmy, że dla pewnych punktów $p = (x, y, z) \in A'$ i $q = (u, v, w) \in A'$ zachodzą nierówności $x \leq u$, $y \leq v$,

$z \leq w$. Ponieważ $p \neq q$ i $m(A') = s+1$, więc $s+1 \leq x+y+z < u+v+w$, zatem $q \in A$. Ponieważ zbiór A jest dobry, więc $p \notin A$, zatem $p = r'$ dla pewnego punktu $r \in B$. Wtedy $r = (x-1, y, z)$. Jednak punkty r i q nie mogą należeć do zbioru A, bo jest on dobry.

Zbiór A' ma więc wszystkie wymagane własności. Zakończyliśmy dowód lematu i tym samym rozwiązanie zadania.