LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września 2013 r. – 30 września 2013 r.)

1. Wykazać, że jeśli liczby całkowite a, b, c spełniają równanie

$$(a+3)^2+(b+4)^2-(c+5)^2=a^2+b^2-c^2,$$

to wspólna wartość obu stron jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Dane są trzy różne liczby całkowite $a,b,c>1$ spełniające warunek $\mathrm{NWD}(a,b,c)=1$. Znaleźć wszystkie możliwe wartości liczby

$$\mathrm{NWD}(a^2b+b^2c+c^2a,\, ab^2+bc^2+ca^2,\, a+b+c).$$

3. Na tablicy napisano słowo *abdc*. W jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku, w środku lub na końcu) palindrom parzystej długości utworzony z liter a, b, c, d. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów możemy uzyskać słowo *bacd*.

(*Uwaga:* Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej do prawej jest takie samo jak czytane od prawej do lewej, np. *abba*, *cc*, *daaaad*.)

4. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ABC leżą odpowiednio punkty D, E, F, przy czym $FA=FE$ oraz $FB=FD$. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC leży na okręgu przechodzącym przez punkty C, D, E.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2013 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (1 października 2013 r. – 4 listopada 2013 r.)

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze liczb całkowitych i przyjmujące wartości całkowite, spełniające warunek

$$f(a+b)^3 - f(a)^3 - f(b)^3 = 3f(a)f(b)f(a+b)$$

dla każdej pary liczb całkowitych a, b.

6. Dowieść, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z, dla których

$$(3x+4y)(4x+5y) = 7^z.$$

7. Dany jest okrąg o i jego cięciwa AB niebędąca średnicą. Na okręgu o wybieramy punkt P, różny od punktów A i B. Punkty Q i R leżą odpowiednio na prostych PA i PB, przy czym $QP = QB$ oraz $RP = RA$. Punkt M jest środkiem odcinka QR. Wykazać, że wszystkie uzyskane w ten sposób proste PM (odpowiadające różnym położeniom punktu P na okręgu o) mają punkt wspólny.

8. W czworościanie $ABCD$ płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego o krawędzi BC przecina krawędź AD w punkcie P, zaś punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą BC. Udowodnić, że $\sphericalangle AQP = \sphericalangle PQD$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 listopada 2013 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

III seria (5 listopada 2013 r. – 4 grudnia 2013 r.)

9. Udowodnić, że dla każdej trójki różnych liczb dodatnich a, b, c z odcinków o długościach

$$\sqrt[3]{(a^2-b^2)(a-b)}, \quad \sqrt[3]{(b^2-c^2)(b-c)}, \quad \sqrt[3]{(c^2-a^2)(c-a)}$$

można zbudować trójkąt.

10. Ciąg x_0, x_1, x_2, ... określamy wzorami: $x_0=1$, $x_1=3$ oraz

$$x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n \qquad \text{dla } n=0,1,2,\ldots.$$

Udowodnić, że dla każdego n istnieją takie liczby całkowite a, b, że

$$x_n=a^2+2b^2.$$

11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB\neq AC$. Okrąg o wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt M jest środkiem odcinka EF. Okrąg o średnicy MD przecina okrąg o w punktach D i P oraz przecina odcinek EF w punktach M i Q. Wykazać, że prosta PQ połowi odcinek AM.

12. W prostokącie P zaznaczono n^2 różnych punktów. Dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 2$ znaleźć największą możliwą liczbę prostokątów, w których każdy wierzchołek jest jednym z zaznaczonych punktów, a boki są równoległe do boków prostokąta P.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 grudnia 2013 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UAM, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

- Dla województwa podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UMK, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`