LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(1 września 2013 r. – 4 grudnia 2013 r.)

Zadanie **1.** Wykazać, że jeśli liczby całkowite a, b, c spełniają równanie
$$(a+3)^2+(b+4)^2-(c+5)^2=a^2+b^2-c^2,$$
to wspólna wartość obu stron jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Rozwińmy kwadraty stojące po lewej stronie danego równania, uzyskując
$$a^2+6a+9+b^2+8b+16-c^2-10c-25=a^2+b^2-c^2.$$
Po redukcji wyrazów podobnych dostajemy $6a+8b-10c=0$, skąd $c=\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b$. Prawą stronę rozważanego równania przekształcamy teraz następująco:
$$a^2+b^2-c^2=a^2+b^2-(\tfrac{3}{5}a+\tfrac{4}{5}b)^2=a^2+b^2-\tfrac{9}{25}a^2-\tfrac{24}{25}ab-\tfrac{16}{25}b^2=$$
$$=\tfrac{16}{25}a^2-\tfrac{24}{25}ab+\tfrac{9}{25}b^2=(\tfrac{4}{5}a-\tfrac{3}{5}b)^2.$$
Do zakończenia rozwiązania pozostaje jeszcze uzasadnić, że liczba $\frac{4}{5}a-\frac{3}{5}b$ jest całkowita. W tym celu korzystamy znów ze związku $c=\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b$, otrzymując
$$\tfrac{4}{5}a-\tfrac{3}{5}b=\tfrac{9}{5}a+\tfrac{12}{5}b-a-3b=3(\tfrac{3}{5}a+\tfrac{4}{5}b)-a-3b=3c-a-3b.$$
Zatem liczba $a^2+b^2-c^2$ jest kwadratem liczby całkowitej $3c-a-3b$.

Zadanie **2.** Dane są trzy różne liczby całkowite $a,b,c>1$ spełniające warunek $\mathrm{NWD}(a,b,c)=1$. Znaleźć wszystkie możliwe wartości liczby
$$\mathrm{NWD}(a^2b+b^2c+c^2a,\ ab^2+bc^2+ca^2,\ a+b+c).$$

Rozwiązanie

Niech d oznacza największy wspólny dzielnik liczb
$$K=a^2b+b^2c+c^2a,\quad L=ab^2+bc^2+ca^2\quad \text{oraz}\quad M=a+b+c.$$
Wykażemy najpierw, że liczby a, b, c są względnie pierwsze z liczbą d.

Przypuśćmy bowiem, że liczby a i d mają wspólny dzielnik pierwszy p; jest on wtedy także dzielnikiem liczb K i M. Różnica $K-a(ab+c^2)=b^2c$ jest zatem podzielna przez p, czyli jedna z liczb b, c jest podzielna przez liczbę pierwszą p. Wobec tego suma $M=a+b+c$ oraz jej dwa składniki są podzielne przez p. Stąd wniosek, że każda z liczb a, b, c jest podzielna przez p, wbrew założeniu $\mathrm{NWD}(a,b,c)=1$. To dowodzi, że $\mathrm{NWD}(a,d)=1$ i podobnie uzasadniamy zależności $\mathrm{NWD}(b,d)=\mathrm{NWD}(c,d)=1$.

Z drugiej strony, liczba $(ab+bc+ca)M-K-L=3abc$ jest podzielna przez d. A ponieważ liczby a, b, c są względnie pierwsze z liczbą d, więc podzielność liczby $3abc$ przez d pociąga za sobą podzielność liczby 3 przez d, skąd $d=1$ lub $d=3$. Obie te wartości są możliwe do uzyskania:

- dla $(a,b,c)=(2,3,4)$ otrzymujemy $\mathrm{NWD}(K,L,M)=\mathrm{NWD}(80,82,9)=1$;
- dla $(a,b,c)=(2,5,8)$ dostajemy $\mathrm{NWD}(K,L,M)=\mathrm{NWD}(348,402,15)=3$.

Odpowiedź: Szukanymi możliwymi wartościami są 1 i 3.

Zadanie **3.** Na tablicy napisano słowo *abdc*. W jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku, w środku lub na końcu) palindrom parzystej długości utworzony z liter a, b, c, d. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów możemy uzyskać słowo *bacd*.

(*Uwaga:* Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej do prawej jest takie samo jak czytane od prawej do lewej, np. *abba*, *cc*, *daaaad*.)

Rozwiązanie

Dla dowolnego słowa w utworzonego z liter a, b, c, d niech $N(w)$ oznacza liczbę pozycji nieparzystych, a $P(w)$ — liczbę pozycji parzystych, na których w słowie w występuje litera a. (Pozycje w słowie numerujemy od lewej strony kolejno liczbami 1, 2, 3, ..., a więc np. $N(\underline{a}b\underline{a}acd)=2$ i $P(aba\underline{a}cd)=1$.) Oznaczmy wreszcie $R(w)=N(w)-P(w)$.

Wykażemy, że jeżeli w wyniku wykonania ruchu ze słowa w powstaje słowo v, to prawdziwy jest związek $R(v)=R(w)$.

Istotnie, dłuższe ze słów w, v otrzymujemy z krótszego poprzez dopisanie palindromu o parzystej długości. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że słowo v uzyskujemy ze słowa w wstawiając w pewnym jego miejscu (na początku, w środku lub na końcu) palindrom postaci $p_1p_2\ldots p_{k-1}p_kp_kp_{k-1}\ldots p_2p_1$, gdzie każdy z symboli p_1, p_2, ..., p_k jest jedną z liter a, b, c, d. W wyniku tego wstawienia dotychczasowe litery słowa w albo pozostają w słowie v na tej samej pozycji, albo też przesuwają się o $2k$ pozycji w prawo. Stąd wniosek, że słowo w zawiera tyle samo liter a na pozycjach nieparzystych, co słowo v poza dopisanym palindromem; podobnie dla pozycji parzystych.

Niech z kolei m oznacza liczbę wystąpień litery a w ciągu p_1, p_2, ..., p_k. Dla $i=1,2,\ldots,k$ symbol p_i występuje w dopisanym palindromie dwukrotnie — raz na pozycji nieparzystej, a raz na parzystej. W konsekwencji dokładnie połowa spośród $2m$ liter a występujących w rozważanym palindromie stoi na pozycjach nieparzystych, a druga połowa — na pozycjach parzystych. Wobec tego $N(v)=N(w)+m$ i $P(v)=P(w)+m$, co pociąga za sobą postulowany związek $R(v)=R(w)$.

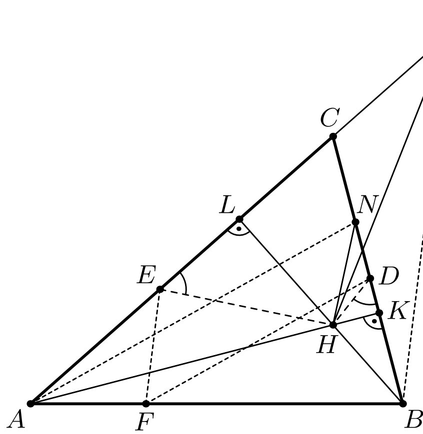
Zatem dowolne słowo w, które można otrzymać na tablicy po skończonej liczbie ruchów, spełnia zależność $R(w)=R(abdc)=1-0=1$. Stąd i z równości $R(bacd)=0-1=-1$ wynika przecząca odpowiedź na postawione pytanie.

Odpowiedź: Uzyskanie słowa *bacd* nie jest możliwe.

Zadanie **4.** Na bokach BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ABC leżą odpowiednio punkty D, E, F, przy czym $FA=FE$ oraz $FB=FD$. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC leży na okręgu przechodzącym przez punkty C, D, E.

Rozwiązanie

Niech K i L będą spodkami wysokości trójkąta ABC opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B oraz niech H będzie punktem przecięcia tych wysokości. Odbijmy symetrycznie punkt A względem punktu L oraz punkt B względem punktu K, otrzymując odpowiednio punkty M oraz N (rys. 1). Wówczas proste AK i BL są symetralnymi odpowiednio odcinków BN i AM.



rys. 1

Punkt B leży na symetralnej odcinka AM, więc trójkąt ABM jest równoramienny. Ponadto trójkąty równoramienne AFE i ABM mają wspólny kąt między ramieniem a podstawą przy wierzchołku A. W rezultacie są one jednokładne względem tego wierzchołka. Analogicznie trójkąty BFD i BAN są jednokładne względem punktu B. Stąd uzyskujemy równości stosunków

(1) $$\frac{AE}{EM} = \frac{AF}{FB} = \frac{ND}{DB}.$$

Z drugiej strony, punkt H leży na symetralnych odcinków AM i BN. Zatem trójkąty AHM i NHB są równoramienne. Co więcej, miary ich kątów między ramieniem a podstawą są równe, gdyż

$$\sphericalangle HAM = \sphericalangle KAC = 90^\circ - \sphericalangle BCA = \sphericalangle LBC = \sphericalangle HBN.$$

W efekcie trójkąty te są podobne. Na mocy zależności (1) podobieństwo, które przeprowadza wierzchołki A, H, M odpowiednio na wierzchołki N, H, B, przekształca punkt E na punkt D. Wobec tego $\sphericalangle HEM = \sphericalangle HDB$, czyli

$$\sphericalangle HEC = 180^\circ - \sphericalangle HDC.$$

Na czworokącie $HDCE$ można więc opisać okrąg, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **5.** Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze liczb całkowitych i przyjmujące wartości całkowite, spełniające warunek

(1) $$f(a+b)^3 - f(a)^3 - f(b)^3 = 3f(a)f(b)f(a+b)$$

dla każdej pary liczb całkowitych a, b.

Rozwiązanie

Przyjmując $a=b=0$ w zależności (1) uzyskujemy $-f(0)^3=3f(0)^3$, skąd

$$f(0)=0. \tag{2}$$

Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą. W myśl równości (2) związek (1) dla wartości $a=n$ i $b=-n$ przybiera postać $-f(n)^3-f(-n)^3=0$. Zatem

$$f(-n)=-f(n) \qquad \text{dla każdego } n. \tag{3}$$

Przypuśćmy wreszcie, że istnieje liczba całkowita $d\neq 0$, dla której $f(d)=0$. Wtedy dla dowolnej liczby całkowitej n z zależności (1) dla $a=n$ oraz $b=d$ dostajemy $f(n+d)^3-f(n)^3=0$, czyli $f(n+d)=f(n)$. W rezultacie

$$\text{jeśli } f(d)=0, \qquad \text{to } f(n+d)=f(n) \text{ dla każdego } n. \tag{4}$$

Jeżeli $f(1)=0$, to związek (4) dowodzi, że $f(n+1)=f(n)$ dla każdego n. Stąd funkcja f jest stała, a wobec równości (2) — zerowa. W dalszej części zakładamy, że $k=f(1)\neq 0$. Podstawiając $a=b=1$ w warunku (1) stwierdzamy, że liczba $x=f(2)$ jest pierwiastkiem równania $x^3-2k^3=3k^2x$. Z rozkładu

$$x^3-3k^2x-2k^3=(x-2k)(x^2+2kx+k^2)=(x-2k)(x+k)^2$$

wynika więc, że $f(2)=2k$ albo $f(2)=-k$. Zbadamy oddzielnie oba przypadki.

Przypadek **1.** $f(2)=2k$.

Wówczas równość

$$f(n)=kn \tag{5}$$

jest spełniona dla $n=0$, $n=1$ oraz $n=2$. Wykażemy indukcyjnie, że jest ona prawdziwa dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej n — i w konsekwencji, na podstawie związku (3), dla dowolnej liczby całkowitej n.

Przypuśćmy w tym celu, że $f(m)=km$ dla pewnej liczby całkowitej $m\geqslant 2$. Korzystając z zależności (1) dla $a=m$ i $b=1$ wnioskujemy, że liczba $y=f(m+1)$ jest pierwiastkiem równania $y^3-m^3k^3-k^3=3mk^2y$. W rozkładzie

$$y^3-3mk^2y-k^3(m^3+1)=[y-k(m+1)][y^2+k(m+1)y+k^2(m^2-m+1)]$$

drugi czynnik jako trójmian kwadratowy zmiennej y ma wyróżnik równy

$$\Delta=k^2(m+1)^2-4k^2(m^2-m+1)=k^2(-3m^2+6m-3)=-3k^2(m-1)^2<0,$$

czyli czynnik ten jest stale dodatni. Zatem $y=k(m+1)$, co dowodzi słuszności związku (5) dla $n=m+1$ i kończy rozumowanie indukcyjne.

Przypadek **2.** $f(2)=-k$.

Wtedy warunek (1) dla wartości $a=2$ oraz $b=1$ prowadzi do równości $f(3)^3=-3k^2f(3)$. Jej strony miałyby przeciwne znaki, gdyby $f(3)\neq 0$, a więc $f(3)=0$. W oparciu o zależność (4) otrzymujemy teraz związek $f(n+3)=f(n)$ dla każdego n, który pociąga za sobą wzór

$$f(n)=\begin{cases} 0, & \text{gdy liczba } n \text{ jest podzielna przez 3,}\\ k, & \text{gdy liczba } n \text{ daje resztę 1 z dzielenia przez 3,}\\ -k, & \text{gdy liczba } n \text{ daje resztę 2 z dzielenia przez 3.}\end{cases} \tag{6}$$

Pozostaje sprawdzić, że dla każdej liczby całkowitej k funkcja f określona jednym ze wzorów (5), (6) spełnia tożsamość (1).

1. Dla funkcji $f(n)=kn$ obie strony warunku (1) wynoszą $k^3(3a^2b+3ab^2)$.

2. Funkcja f zadana wzorem (6) ma własność (3). Zatem wprowadzając oznaczenie $c=-(a+b)$ możemy przepisać dowodzoną zależność (1) w postaci

$$f(a)^3+f(b)^3+f(c)^3=3f(a)f(b)f(c). \tag{7}$$

Jeżeli co najmniej jedna z liczb a, b, c jest podzielna przez 3, to prawa strona oraz pewien składnik lewej strony warunku (7) są równe zeru, a pozostałe dwa składniki znoszą się wzajemnie. W przeciwnym razie związek $a+b+c=0$ oznacza, że liczby a, b, c dają tę samą resztę (1 lub 2) z dzielenia przez 3, skąd $f(a)=f(b)=f(c)$. W obu przypadkach równość (7) jest prawdziwa.

Odpowiedź: Wszystkie funkcje f o żądanej własności są opisane wzorami (5) i (6), w których parametr k może być dowolną liczbą całkowitą.

Zadanie **6.** Dowieść, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z, dla których

$$(3x+4y)(4x+5y)=7^z.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dodatnie liczby całkowite x, y, z spełniają daną równość. Ponieważ liczba 7 jest jedynym dzielnikiem pierwszym prawej strony, więc

$$3x+4y=7^a \qquad \text{oraz} \qquad 4x+5y=7^b$$

dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych a i b o sumie równej z. Nierówność $3x+4y<4x+5y$ pociąga za sobą związek $a<b$. Wobec tego $b\geqslant a+1$, skąd

$$4x+5y=7^b\geqslant 7\cdot 7^a=7(3x+4y)=21x+28y>4x+5y.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi tezy zadania.

Zadanie **7.** Dany jest okrąg o i jego cięciwa AB niebędąca średnicą. Na okręgu o wybieramy punkt P, różny od punktów A i B. Punkty Q i R leżą odpowiednio na prostych PA i PB, przy czym $QP=QB$ oraz $RP=RA$. Punkt M jest środkiem odcinka QR. Wykazać, że wszystkie uzyskane w ten sposób proste PM (odpowiadające różnym położeniom punktu P na okręgu o) mają punkt wspólny.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że szukanym punktem wspólnym jest punkt C, w którym przecinają się styczne do okręgu o w punktach A i B (rys. 2 i 3).

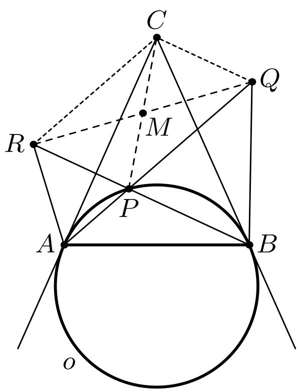
Trójkąty ACB, ARP i BQP są równoramienne. Wykażemy, że mają one jednakowe miary kątów między ramieniem a podstawą. Istotnie, przyjmijmy oznaczenie $\alpha=\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA$. Na mocy twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą kąt wpisany oparty na krótszym łuku AB okręgu o ma miarę α. Jeżeli więc punkt P leży na owym krótszym łuku (rys. 2), to

$$\sphericalangle APR=\sphericalangle BPQ=180^\circ-\sphericalangle APB=\alpha,$$

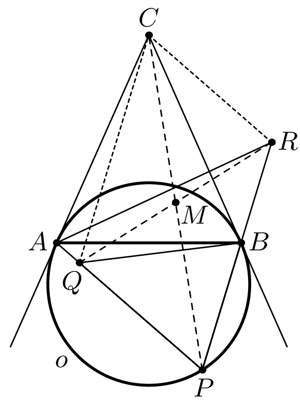
jeżeli zaś punkt P leży na dłuższym łuku AB okręgu o (rys. 3), to

$$\sphericalangle APR = \sphericalangle BPQ = \sphericalangle APB = \alpha.$$

Wobec tego rozważane trzy trójkąty równoramienne są podobne.



rys. 2



rys. 3

Trójkąty równoramienne ARP i ACB są zbudowane na dwóch bokach trójkąta ABP jako na podstawach, przy czym jeden do wewnątrz, a drugi — na zewnątrz trójkąta ABP. W obu przypadkach z podobieństwa tych trójkątów równoramiennych i równości $\sphericalangle RAP = \sphericalangle CAB$ wynikają zależności

$$\frac{RA}{AC} = \frac{PA}{AB} \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle RAC = \sphericalangle PAB.$$

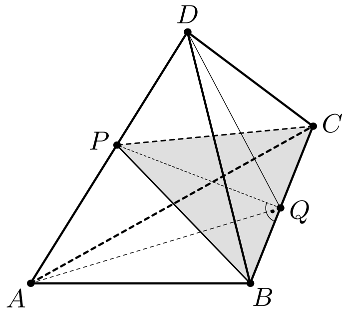
Zatem trójkąty RAC i PAB są podobne (cecha *bok-kąt-bok*). Analogicznie trójkąty QCB i PAB są podobne. Stąd trójkąty RAC i QCB są podobne, a więc przystające, gdyż ich odpowiadające boki AC i CB mają równe długości. W efekcie $QC = RA = RP$ i analogicznie dowodzimy, że $CR = PQ$.

Półproste $PQ^{\rightarrow}$ i $PR^{\rightarrow}$ albo przecinają odpowiednio odcinki BC i AC (rys. 2), albo też przechodzą odpowiednio przez punkty A i B (rys. 3). W obu sytuacjach punkty Q i R leżą po przeciwnych stronach prostej PC, a równości $QC = RP$ i $CR = PQ$ oznaczają, że punkty P, Q, C, R są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Punkt M jest zaś środkiem jego przekątnej QR, czyli prosta PM przechodzi przez wierzchołek C, tak jak twierdziliśmy.

Zadanie **8.** W czworościanie $ABCD$ płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego o krawędzi BC przecina krawędź AD w punkcie P, zaś punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą BC. Udowodnić, że $\sphericalangle AQP = \sphericalangle PQD$.

Rozwiązanie

Oznaczmy symbolem φ symetrię względem prostej PQ, czyli obrót wokół tej prostej o kąt $180°$ (rys. 4).



rys. 4

Prosta BC przecina prostą PQ pod kątem prostym, a więc przechodzi przy symetrii φ na siebie. Wobec tego φ przeprowadza dowolną płaszczyznę π zawierającą prostą BC na pewną płaszczyznę zawierającą prostą BC, a ściślej — na płaszczyznę *symetryczną do* π *względem płaszczyzny* BCP.

Na mocy warunków zadania płaszczyzny BCA i BCD są symetryczne względem płaszczyzny BCP. Zatem φ przekształca płaszczyznę BCA na BCD. Z kolei płaszczyzna AQD przechodzi przy symetrii φ na siebie, gdyż zawiera oś tej symetrii. Stąd φ odwzorowuje przekrój płaszczyzn BCA i AQD (prostą AQ) na przekrój płaszczyzn BCD i AQD (prostą DQ). W rezultacie proste AQ i DQ są symetryczne względem prostej PQ, skąd wynika teza.

Zadanie **9.** Udowodnić, że dla każdej trójki różnych liczb dodatnich a, b, c z odcinków o długościach

$$\sqrt[3]{(a^2-b^2)(a-b)},\qquad \sqrt[3]{(b^2-c^2)(b-c)},\qquad \sqrt[3]{(c^2-a^2)(c-a)}$$

można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie

Należy wykazać, że suma dowolnych dwóch pierwiastków występujących w treści zadania jest większa od trzeciego pierwiastka. Udowodnimy, że

$$(1)\qquad \sqrt[3]{(a^2-b^2)(a-b)}+\sqrt[3]{(b^2-c^2)(b-c)}>\sqrt[3]{(c^2-a^2)(c-a)}.$$

Dowody dwóch pozostałych nierówności przebiegają analogicznie.

Zamiana symboli a i c nie wpływa na prawą stronę zależności (1) oraz zmienia kolejność dwóch składników lewej strony. Bez szkody dla ogólności dalszego rozumowania możemy więc przyjąć, że $a<c$.

Załóżmy najpierw, że b jest najmniejszą z liczb dodatnich a, b, c. Wtedy

$$c-b>c-a>0 \qquad \text{oraz} \qquad c^2-b^2>c^2-a^2>0.$$

Po wymnożeniu uzyskujemy związek

$$(c^2-b^2)(c-b)>(c^2-a^2)(c-a),$$

z którego wynika, że sam drugi składnik po lewej stronie nierówności (1) jest większy od prawej strony. Jeżeli natomiast b jest największą spośród danych trzech liczb, to podobnie uzasadniamy, że $(b^2-a^2)(b-a)>(c^2-a^2)(c-a)$ i tym razem już pierwszy składnik lewej strony jest większy od prawej strony.

Do zakończenia dowodu zależności (1) pozostaje rozważyć przypadek, w którym $a<b<c$. Dzieląc tę zależność przez prawą stronę i rozkładając różnice kwadratów na dwa czynniki otrzymujemy równoważną postać

$$\sqrt[3]{\frac{(b-a)^2(b+a)}{(c-a)^2(c+a)}}+\sqrt[3]{\frac{(c-b)^2(c+b)}{(c-a)^2(c+a)}}>1,$$

czyli

$$\frac{b-a}{c-a}\sqrt[3]{\frac{(c-a)(b+a)}{(b-a)(c+a)}}+\frac{c-b}{c-a}\sqrt[3]{\frac{(c-a)(c+b)}{(c-b)(c+a)}}>1. \tag{2}$$

Aby wykazać związek (2) zauważmy, że liczby $b-a$, $c-a$ oraz $c-b$ są dodatnie. Wobec tego stojąca pod pierwszym pierwiastkiem liczba

$$\frac{(c-a)(b+a)}{(b-a)(c+a)}=\frac{bc-a^2+a(c-b)}{bc-a^2-a(c-b)}=1+\frac{2a(c-b)}{bc-a^2-a(c-b)}=1+\frac{2a(c-b)}{(b-a)(c+a)}$$

jest większa od 1, a iloraz stojący przed tym pierwiastkiem jest dodatni. Stąd i z analogicznego stwierdzenia dla drugiego pierwiastka dostajemy

$$\frac{b-a}{c-a}\sqrt[3]{\frac{(c-a)(b+a)}{(b-a)(c+a)}}+\frac{c-b}{c-a}\sqrt[3]{\frac{(c-a)(c+b)}{(c-b)(c+a)}}>\frac{b-a}{c-a}+\frac{c-b}{c-a}=1,$$

a więc uzyskaliśmy żądaną nierówność (2).

Zadanie **10.** Ciąg x_0, x_1, x_2, ... określamy wzorami: $x_0=1$, $x_1=3$ oraz

$$x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n \qquad \text{dla } n=0,1,2,\ldots. \tag{1}$$

Udowodnić, że dla każdego n istnieją takie liczby całkowite a, b, że

$$x_n=a^2+2b^2.$$

Rozwiązanie

Określmy liczby całkowite a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... wzorami: $a_0=1$, $b_0=0$,

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2b_n, \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases} \qquad \text{dla } n=0,1,2,\ldots. \tag{2}$$

Wykażemy indukcyjnie, że wówczas dla każdego n prawdziwa jest równość

$$x_n=a_n^2+2b_n^2. \tag{3}$$

Bezpośrednie sprawdzenie wskazuje, że zależność (3) jest spełniona dla $n=0$ i $n=1$. Przechodząc do kroku indukcyjnego przyjmijmy, że

$$x_m=a_m^2+2b_m^2 \qquad \text{oraz} \qquad x_{m+1}=a_{m+1}^2+2b_{m+1}^2 \tag{4}$$

dla pewnej liczby całkowitej $m\geqslant 0$. Należy udowodnić prawdziwość związku $x_{m+2}=a_{m+2}^2+2b_{m+2}^2$, który w myśl wzorów (1) i (4) można zapisać jako

$$6(a_{m+1}^2+2b_{m+1}^2)-(a_m^2+2b_m^2)=a_{m+2}^2+2b_{m+2}^2. \tag{5}$$

Wprowadźmy oznaczenia $A = a_m$ i $B = b_m$. Wtedy korzystając z zależności (2) uzyskujemy $a_{m+1} = A+2B$, $b_{m+1} = A+B$, $a_{m+2} = 3A+4B$ i $b_{m+2} = 2A+3B$. Wobec tego dowodzony związek (5) przybiera postać

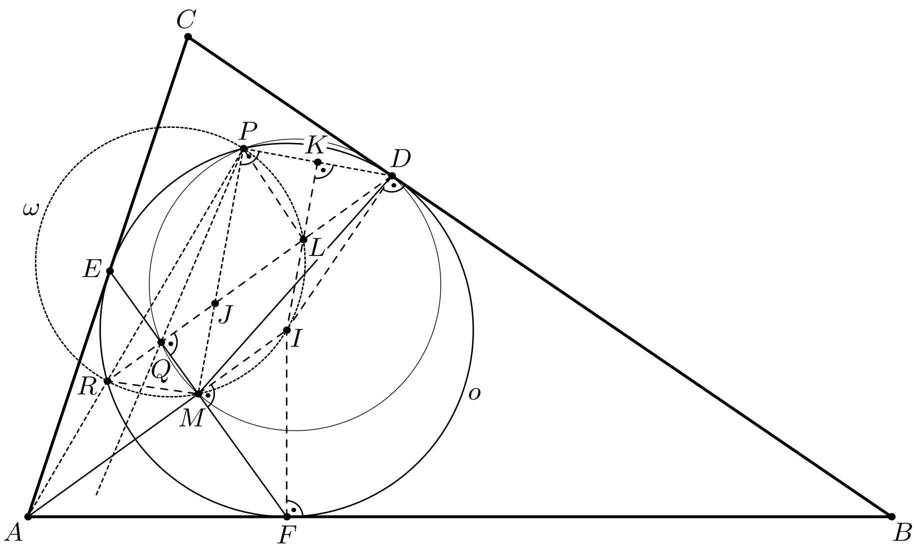
$$6[(A+2B)^2+2(A+B)^2]-[A^2+2B^2] = (3A+4B)^2+2(2A+3B)^2. \tag{6}$$

Obliczamy, że obie strony równości (6) wynoszą $17A^2+48AB+34B^2$. To zaś kończy dowód zależności (3) i rozwiązanie zadania.

Zadanie **11.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Okrąg o wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt M jest środkiem odcinka EF. Okrąg o średnicy MD przecina okrąg o w punktach D i P oraz przecina odcinek EF w punktach M i Q. Wykazać, że prosta PQ połowi odcinek AM.

Rozwiązanie

Oznaczmy symbolami I oraz K odpowiednio środek okręgu o oraz środek odcinka DP. Niech J i L będą punktami, w których prosta DQ przecina odpowiednio proste MP i IK, a R niech będzie punktem symetrycznym do punktu J względem punktu Q (rys. 5).



rys. 5

Końce odcinka MD są rzutami prostokątnymi punktu I na proste EF i BC, co dowodzi, że punkty P i Q leżą po przeciwnej stronie prostej MD niż punkt I. Ponadto proste IM i DQ są prostopadłe do prostej EF, a proste IK i MP — do prostej DP. Wobec tego punkty M, I, L oraz J są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku.

Proste IK i EF są symetralnymi odpowiednio odcinków DP i JR, skąd

$$LP = LD = LJ = IM \qquad \text{oraz} \qquad MR = MJ = IL.$$

Zatem czworokąty $RMIL$ i $MILP$ są trapezami równoramiennymi. Wynika stąd, że okrąg ω opisany na trójkącie MIL przechodzi także przez punkty R i P, a punkty R, M, I, L, P leżą na tym okręgu w wypisanej kolejności. Co więcej, łuki RI, ML oraz IP okręgu ω mają jednakowe długości. W efekcie $IR = IP$, czyli punkt R leży na okręgu o.

Prosta PR jest więc *osią potęgową* okręgów o i ω, a *potęgi* punktu A względem tych okręgów wynoszą odpowiednio AF^2 i $AM \cdot AI$ (zob. *LVI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2007, Dodatek, str. 98-100). Na mocy podobieństwa trójkątów prostokątnych AMF i AFI obie te potęgi są równe. W konsekwencji punkt A leży na prostej PR.

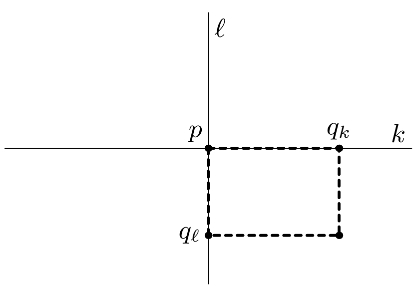
Udowodniliśmy w ten sposób, że odcinki RJ oraz AM są jednokładne względem punktu P. Jednak punkt Q jest środkiem odcinka RJ. W rezultacie prosta PQ połowi również odcinek AM, co należało wykazać.

Zadanie **12.** W prostokącie P zaznaczono n^2 różnych punktów. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ znaleźć największą możliwą liczbę prostokątów, w których każdy wierzchołek jest jednym z zaznaczonych punktów, a boki są równoległe do boków prostokąta P.

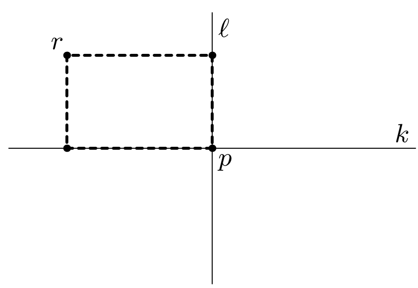
Rozwiązanie

Prostokątem *dobrym* nazwiemy każdy prostokąt, w którym wszystkie wierzchołki są zaznaczone, a boki są równoległe do boków prostokąta P. Wykażemy, że dowolny z n^2 zaznaczonych punktów może być wierzchołkiem co najwyżej $(n-1)^2$ różnych dobrych prostokątów. Wyniknie stąd, że istnieje co najwyżej $n^2(n-1)^2$ par złożonych z dobrego prostokąta i jego wierzchołka, czyli co najwyżej $\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$ dobrych prostokątów.

Przechodząc do dowodu poprowadźmy przez zaznaczony punkt p dwie proste k i ℓ, równoległe do boków prostokąta P. Przyjmijmy, że na prostych k i ℓ leży odpowiednio m_k i m_ℓ zaznaczonych punktów, różnych od p. Niech wreszcie M oznacza liczbę dobrych prostokątów o wierzchołku p.



rys. 6



rys. 7

Każdy dobry prostokąt o wierzchołku p ma jeszcze jeden wierzchołek q_k na prostej k i jeszcze jeden wierzchołek q_ℓ na prostej ℓ. Ponadto dowolna spośród $m_k m_\ell$ par zaznaczonych punktów (q_k, q_ℓ) leżących odpowiednio na prostych k i ℓ pochodzi od co najwyżej jednego dobrego prostokąta o wierzchołku p (rys. 6). Zatem $M \leqslant m_k m_\ell$.

Z drugiej strony, dobry prostokąt o wierzchołku p ma jeden wierzchołek r leżący poza prostymi k i ℓ. Każdy zaznaczony punkt leżący poza prostymi k i ℓ może zaś być wierzchołkiem co najwyżej jednego dobrego prostokąta o wierzchołku p (rys. 7), a liczba takich punktów wynosi $n^2 - m_k - m_\ell - 1$. Wobec tego $M \leqslant n^2 - m_k - m_\ell - 1$.

Jeżeli teraz spełniona jest nierówność $m_k + m_\ell > 2n-2$, to z zależności $M \leqslant n^2 - m_k - m_\ell - 1$ otrzymujemy $M < n^2 - (2n-2) - 1 = (n-1)^2$. Natomiast w przypadku $m_k + m_\ell \leqslant 2n-2$ związek $M \leqslant m_k m_\ell$ prowadzi do wniosku, że

$$M \leqslant m_k(2n-2-m_k) = 2(n-1)m_k - m_k^2 = (n-1)^2 - [(n-1)-m_k]^2 \leqslant (n-1)^2.$$

To kończy dowód zapowiedzianego stwierdzenia.

Pozostaje wskazać sposób zaznaczenia n^2 punktów, dla którego liczba dobrych prostokątów wynosi $\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$. W tym celu prostokąt P o bokach poziomych i pionowych przecinamy siatką n prostych poziomych i n prostych pionowych oraz zaznaczamy n^2 punktów uzyskanych w przecięciu. Wówczas każdy dobry prostokąt jest wyznaczony przez dwie proste poziome i dwie pionowe, a zarówno dwie proste poziome, jak i dwie pionowe można wybrać na $\frac{1}{2}n(n-1)$ sposobów, co łącznie daje $\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$ dobrych prostokątów.

Odpowiedź: Szukana liczba prostokątów jest równa $\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`