# LXV Olimpiada Matematyczna

## Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2014 r. (pierwszy dzień zawodów)

**1.** Dane są takie dodatnie liczby całkowite $x$ i $y$, że liczba $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$ jest całkowita. Udowodnić, że liczba $\dfrac{x^2}{y}$ jest całkowita.

**2.** Różne punkty $A$, $B$ i $C$ leżą w podanej kolejności na jednej prostej. Punkt $D$ leży na symetralnej odcinka $BC$ w odległości $h>0$ od tego odcinka. Niech $r$ oznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt $ABD$, a $R$ — promień okręgu o środku leżącym poza trójkątem $ACD$, stycznego do odcinka $CD$ oraz stycznego do prostych $AC$ i $AD$. Wykazać, że $h=r+R$.

**3.** Dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 1$ wyznaczyć najmniejszą wartość wielomianu

$$W_n(x)=x^{2n}+2x^{2n-1}+3x^{2n-2}+\ldots+(2n-1)x^2+2nx$$

określonego na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

# LXV Olimpiada Matematyczna

**Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego**

22 lutego 2014 r. (drugi dzień zawodów)

**4.** W rozgrywkach ligi piłkarskiej wzięło udział $2n$ drużyn ($n \geqslant 2$) i odbyło się $2n-1$ kolejek. W każdej kolejce każda drużyna rozegrała jeden mecz. Dowolne dwie drużyny spotkały się ze sobą podczas rozgrywek w dokładnie jednym meczu. Ponadto w każdym meczu jedna drużyna była gospodarzem, a druga — gościem.

Drużynę nazwiemy *podróżującą*, jeżeli w dowolnych dwóch sąsiednich kolejkach była ona raz gospodarzem i raz gościem. Udowodnić, że istnieją co najwyżej dwie drużyny podróżujące.

**5.** Okręgi $o_1$ i $o_2$, styczne do pewnej prostej odpowiednio w punktach $A$ i $B$, przecinają się w punktach $X$ i $Y$, przy czym punkt $X$ leży bliżej prostej $AB$ niż punkt $Y$. Prosta $AX$ przecina okrąg $o_2$ w punkcie $P$ różnym od $X$. Styczna do okręgu $o_2$ w punkcie $P$ przecina prostą $AB$ w punkcie $Q$. Wykazać, że $\sphericalangle XYB = \sphericalangle BYQ$.

**6.** Liczbę całkowitą $n$ nazwiemy *dobrą*, jeżeli istnieje taka liczba pierwsza $p$, że liczba $n$ jest podzielna przez $p$, ale nie przez $p^2$. Dowieść, że wśród liczb $1, 2, 3, \ldots, 10^{12}$ liczby dobre stanowią co najmniej 99%.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.