LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

8 kwietnia 2014 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dane są względnie pierwsze liczby całkowite $k,n\geqslant 1$. Na tablicy napisano w pewnej kolejności wszystkie dodatnie liczby całkowite nie przekraczające $k+n$. Ruch polega na zamianie miejscami dwóch liczb różniących się o k albo o n. Dowieść, że można wykonać ciąg ruchów, który doprowadzi liczby na tablicy do kolejności $1, 2, \ldots, k+n-1, k+n$.

2. Dane są takie liczby całkowite $k\geqslant 2$, $n\geqslant 1$ oraz liczby całkowite $a_1,a_2,\ldots,a_k$ i $b_1,b_2,\ldots,b_n$, że $1<a_1<a_2<\ldots<a_k<b_1<b_2<\ldots<b_n$. Wykazać, że jeżeli

$$a_1+a_2+\ldots+a_k>b_1+b_2+\ldots+b_n,$$

to

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k>b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n.$$

3. Czworościan $ABCD$ o ścianach ostrokątnych jest wpisany w sferę o środku O. Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do płaszczyzny ABC przecina daną sferę w punkcie D' leżącym po przeciwnej stronie płaszczyzny ABC niż punkt D. Prosta DD' przecina płaszczyznę ABC w punkcie P leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnić, że jeżeli $\sphericalangle APB=2\sphericalangle ACB$, to $\sphericalangle ADD'=\sphericalangle BDD'$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

9 kwietnia 2014 r. (drugi dzień zawodów)

4. Niech Q_+ oznacza zbiór dodatnich liczb wymiernych. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon Q_+ \to Q_+$ spełniające dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ i każdej liczby wymiernej $q > 0$ warunek

$$\underbrace{f(f(f(\ldots f(f}_{n}(q))\ldots))) = f(nq).$$

5. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y spełniających równanie

$$2^x + 17 = y^4.$$

6. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC. Proste MN oraz AD przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q oraz A, R. Dowieść, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PQR.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.