LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

8 kwietnia 2014 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Dane są względnie pierwsze liczby całkowite $k,n \geqslant 1$. Na tablicy napisano w pewnej kolejności wszystkie dodatnie liczby całkowite nie przekraczające $k+n$. Ruch polega na zamianie miejscami dwóch liczb różniących się o k albo o n. Dowieść, że można wykonać ciąg ruchów, który doprowadzi liczby na tablicy do kolejności $1,2,\ldots,k+n-1,k+n$.

Rozwiązanie

Wykażemy, że dla każdej kolejności liczb na tablicy i dowolnej pary p, q spośród tych liczb istnieje ciąg ruchów, w wyniku którego liczby p i q zostają zamienione miejscami, a wszystkie pozostałe liczby zachowują swoje miejsca.

Określmy ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, $\ldots$ wzorami: $a_1 = p$ oraz

$$(1) \qquad a_{i+1} = \begin{cases} a_i - k, & \text{gdy } a_i > k, \\ a_i + n, & \text{gdy } a_i \leqslant k \end{cases} \qquad \text{dla } i = 1,2,3,\ldots.$$

Za pomocą indukcji stwierdzamy, że każdy wyraz tego ciągu jest dodatnią liczbą całkowitą nie większą niż $k+n$. Ponadto dla dowolnego $i \geqslant 1$ liczba $a_i - a_{i+1} + n$ wynosi 0 albo $k+n$, a więc jest podzielna przez $k+n$.

Przypuśćmy, że pewne dwa wyrazy rozważanego ciągu są równe: $a_s = a_t$, przy czym $s<t$. Wtedy dodając liczby $a_i - a_{i+1} + n$ dla $i = s, s+1, s+2, \ldots, t-1$ otrzymujemy liczbę $(t-s)n$ podzielną przez $k+n$. Liczby n i $k+n$ są względnie pierwsze, czyli różnica $t-s$ musi być podzielna przez $k+n$. Stąd wniosek, że w ciągu a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{k+n} każda z liczb 1, 2, 3, $\ldots$, $k+n$ występuje dokładnie raz. Zatem $a_r = q$ dla pewnego wskaźnika $r \in \{1,2,\ldots,k+n-1,k+n\}$. Co więcej, żadne dwie z liczb a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_r nie są równe.

Na mocy wzoru (1) dla dowolnego $i \geqslant 1$ dopuszczalny jest ruch $a_i \leftrightarrow a_{i+1}$ zamieniający miejscami liczby a_i oraz a_{i+1}. Bezpośrednio sprawdzamy teraz, że do żądanej zamiany miejscami liczb $a_1 = p$ i $a_r = q$ prowadzi ciąg ruchów

$$a_1 \leftrightarrow a_2, \quad a_2 \leftrightarrow a_3, \quad a_3 \leftrightarrow a_4, \quad \ldots, \quad a_{r-3} \leftrightarrow a_{r-2}, \quad a_{r-2} \leftrightarrow a_{r-1}, \quad a_{r-1} \leftrightarrow a_r,$$
$$a_{r-2} \leftrightarrow a_{r-1}, \quad a_{r-3} \leftrightarrow a_{r-2}, \quad \ldots, \quad a_3 \leftrightarrow a_4, \quad a_2 \leftrightarrow a_3, \quad a_1 \leftrightarrow a_2.$$

Wreszcie dla danej początkowej kolejności liczb na tablicy wykonajmy kolejno dla $d = 1,2,3,\ldots,k+n-1$ ciąg ruchów zamieniający liczbę d z aktualną d-tą liczbą na tablicy (o ile ta ostatnia jest różna od d), uzyskując w rezultacie sytuację, w której pierwszymi d liczbami na tablicy są liczby 1, 2, 3, $\ldots$, d. Wówczas doprowadzimy ostatecznie wszystkie liczby do kolejności rosnącej.

Zadanie **2.** Dane są takie liczby całkowite $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ oraz liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_k$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$, że $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k < b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Wykazać, że jeżeli

(1) $$a_1 + a_2 + \ldots + a_k > b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

to

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k > b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n.$$

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenie $f(u) = \sqrt[u]{u}$ dla $u = 2, 3, 4, \ldots$. Udowodnimy, że

(2) $$f(w) > f(w+1) \qquad \text{dla każdego } w \geqslant 3.$$

Bezpośrednie wymnożenie wskazuje, że $\dfrac{w+1}{w} < \dfrac{t+1}{t}$ dla $0 < t < w$. Zatem

(3) $$\left(\frac{w+1}{w}\right)^w < \frac{w+1}{w} \cdot \left(\frac{w+1}{w} \cdot \frac{w}{w-1} \cdot \frac{w-1}{w-2} \cdot \frac{w-2}{w-3} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{(w+1)^2}{2w}.$$

Na mocy zależności $(r+1)^2 < 2r^2$ dla $r > 1 + \sqrt{2}$ prawa strona związku (3) jest mniejsza od w. W efekcie $\left(\dfrac{w+1}{w}\right)^w < w$, co jest równoważne nierówności (2).

Ponieważ $b_1 \geqslant 4$, więc z zależności (2) i związku $f(2) = f(4)$ otrzymujemy

$$f(a_i) \geqslant f(b_1) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, k \qquad \text{oraz} \qquad f(b_1) \geqslant f(b_j) \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n.$$

W myśl określenia funkcji f powyższe nierówności można zapisać w postaci

$$a_i \geqslant f(b_1)^{a_i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, k \qquad \text{oraz} \qquad f(b_1)^{b_j} \geqslant b_j \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Stąd zaś, po wymnożeniu stronami i skorzystaniu z warunku (1), uzyskujemy

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \geqslant f(b_1)^{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} > f(b_1)^{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \geqslant b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n.$$

Zadanie **3.** Czworościan $ABCD$ o ścianach ostrokątnych jest wpisany w sferę o środku O. Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do płaszczyzny ABC przecina daną sferę w punkcie D' leżącym po przeciwnej stronie płaszczyzny ABC niż punkt D. Prosta DD' przecina płaszczyznę ABC w punkcie P leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnić, że jeżeli $\sphericalangle APB = 2\sphericalangle ACB$, to $\sphericalangle ADD' = \sphericalangle BDD'$.

Rozwiązanie

Prosta OD' przecina płaszczyznę ABC pod kątem prostym w punkcie S będącym środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC (rys. 1). Punkt S leży więc wewnątrz tego trójkąta, a ponadto z równości

$$\sphericalangle APB = 2\sphericalangle ACB = \sphericalangle ASB$$

wynika, że punkty A, B, P i S leżą na jednym okręgu. W konsekwencji

(1) $$\sphericalangle SAP = \sphericalangle SBP.$$

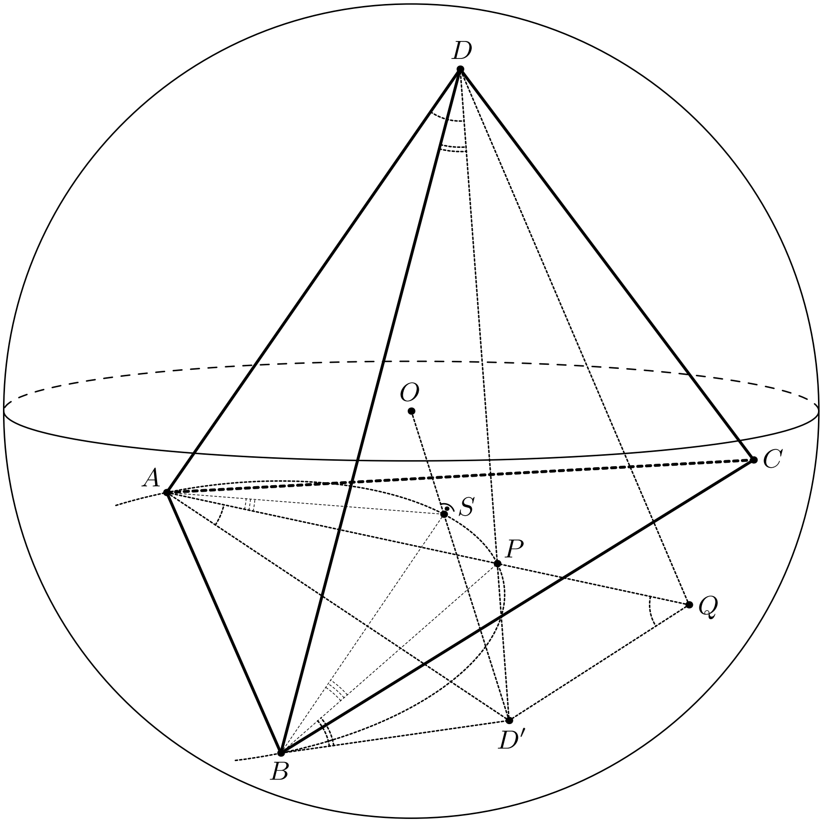
Rozważmy teraz obrót wokół prostej OD' o kąt $\sphericalangle ASB$. Przeprowadza on półprostą $AS^{\rightarrow}$ na półprostą $BS^{\rightarrow}$. Zatem na mocy zależności (1) obrót ten przekształca półprostą $AP^{\rightarrow}$ na półprostą $BP^{\rightarrow}$, skąd otrzymujemy związek

$$\sphericalangle PAD' = \sphericalangle PBD'. \tag{2}$$

Niech prosta AP przecina daną sferę ponownie w punkcie Q. Punkty A, Q, D i D' leżą na jednej sferze, a także na jednej płaszczyźnie, gdyż odcinki AQ i DD' przecinają się w punkcie P. Wobec tego wymienione cztery punkty leżą na jednym okręgu. Co więcej, trójkąty prostokątne ASD' i QSD' są przystające, czyli trójkąt $AD'Q$ jest równoramienny. W rezultacie

$$\sphericalangle ADD' = \sphericalangle AQD' = \sphericalangle PAD'. \tag{3}$$

Podobnie dowodzimy równości $\sphericalangle BDD' = \sphericalangle PBD'$. Łącząc ją z zależnościami (2) i (3) uzyskujemy tezę zadania.



rys. 1

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

9 kwietnia 2014 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Niech Q_+ oznacza zbiór dodatnich liczb wymiernych. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon Q_+ \to Q_+$ spełniające dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ i każdej liczby wymiernej $q > 0$ warunek

$$\underbrace{f(f(f(\ldots f(f}_{n}(q))\ldots))) = f(nq). \tag{1}$$

Rozwiązanie

Dla dowolnych wartości $m \geqslant 1$ i $r \in Q_+$ korzystając z warunku (1) kolejno dla $n = 2m$ i $q = r$, dla $n = m$ i $q = r$ oraz dla $n = m+1$ i $q = mr$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(2mr) &= \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{2m}(r))\ldots)) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{m}\underbrace{f(f(\ldots f}_{m}(r)\ldots)))\ldots)) = \\ &= \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{m}(f(mr)))\ldots)) = f((m+1)mr). \end{aligned} \tag{2}$$

Zapiszmy teraz dowolnie wybrany element $s \in Q_+$ w postaci ilorazu $s = \frac{a}{b}$ liczb całkowitych a i b większych od 1. Wówczas na podstawie związku (2) dla $m = b-1$ i $r = \frac{a}{2b(b-1)}$ oraz dla $m = a-1$ i $r = \frac{1}{2(a-1)}$ uzyskujemy

$$\begin{aligned} f(s) &= f\left(2(b-1)\cdot\frac{a}{2b(b-1)}\right) = f\left(b(b-1)\cdot\frac{a}{2b(b-1)}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \\ &= f\left(a(a-1)\cdot\frac{1}{2(a-1)}\right) = f\left(2(a-1)\cdot\frac{1}{2(a-1)}\right) = f(1). \end{aligned}$$

W rezultacie f jest funkcją stałą. Rzecz jasna funkcje stałe mają własność (1).

Odpowiedź: Szukanymi funkcjami są wszystkie funkcje stałe.

Zadanie **5.** Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y spełniających równanie

$$2^x + 17 = y^4.$$

Rozwiązanie

Z tożsamości $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ dla $a = y^4$ i $b = 2^x$ wynika, że liczba $a^4 - b^4 = y^{16} - 16^x$ jest podzielna przez $a - b = y^4 - 2^x = 17$. Inaczej mówiąc, liczby y^{16} i 16^x dają jednakowe reszty z dzielenia przez 17.

Wymnażając nawiasy w wyrażeniu $16^x = (17-1)^x$ stwierdzamy, że przy dzieleniu przez 17 liczba 16^x daje resztę 1, gdy x jest liczbą parzystą, albo resztę 16, gdy x jest liczbą nieparzystą. Z kolei w myśl małego twierdzenia

Fermata liczba y^{16} daje przy dzieleniu przez 17 resztę 0 lub 1. Zatem x jest liczbą parzystą.

Wobec tego prawdziwy jest rozkład

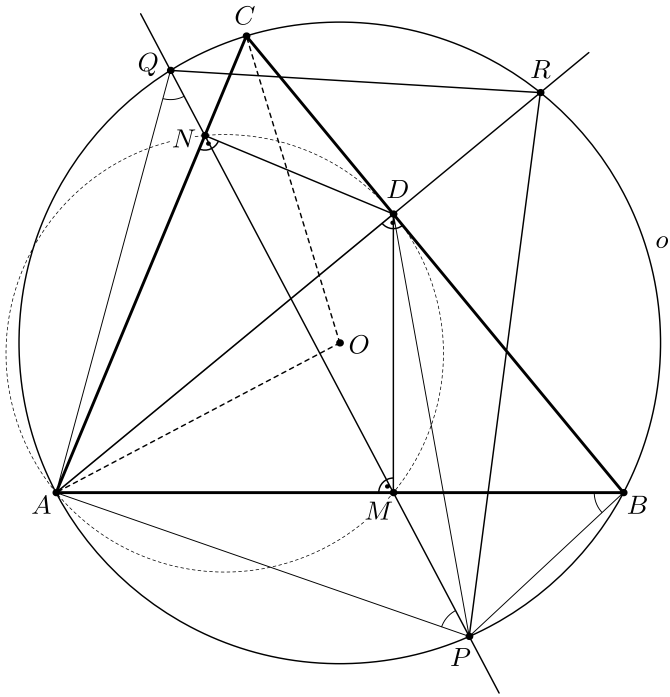
$$17 = y^4 - 2^x = (y^2 - 2^{x/2})(y^2 + 2^{x/2}),$$

w którym czynniki są dwiema różnymi liczbami całkowitymi, a drugi czynnik jest dodatni i większy od pierwszego. Liczba pierwsza 17 ma tylko jeden taki rozkład: $17 = 1 \cdot 17$. Stąd $y^2 - 2^{x/2} = 1$ i $y^2 + 2^{x/2} = 17$, czyli $2^{x/2} = 8$ i $y^2 = 9$. Tak otrzymane liczby $x = 6$ i $y = 3$ spełniają warunki zadania: $2^6 + 17 = 81 = 3^4$.

Odpowiedź: Jedyną parą o żądanych własnościach są liczby $x = 6$ i $y = 3$.

Zadanie **6.** W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC. Proste MN oraz AD przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q oraz A, R. Dowieść, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PQR.

Rozwiązanie



rys. 2

Rozpoczniemy od wykazania, że punkt A jest środkiem łuku PQ okręgu o opisanego na trójkącie ABC (rys. 2).

Punkty M i N leżą na okręgu o średnicy AD, skąd otrzymujemy

$$\sphericalangle ANM = \sphericalangle ADM = 90^\circ - \sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC. \tag{1}$$

Niech z kolei O oznacza środek okręgu o. Wówczas

$$\sphericalangle NAO = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle AOC) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle ABC) = 90^\circ - \sphericalangle ABC. \tag{2}$$

Łącząc związki (1) i (2) dostajemy równość $\sphericalangle ANM + \sphericalangle NAO = 90^\circ$. W efekcie proste AO i MN są prostopadłe, co dowodzi zapowiedzianego stwierdzenia.

Skoro trójkąt PAQ jest równoramienny, więc $\sphericalangle APM = \sphericalangle AQP = \sphericalangle ABP$. Zatem trójkąty AMP i APB są podobne. Trójkąty prostokątne AMD i ADB także są podobne. Z podobieństw tych uzyskujemy zależności

$$AP^2 = AM \cdot AB = AD^2.$$

W konsekwencji również trójkąt PAD jest równoramienny. Wobec tego

$$\begin{aligned}\sphericalangle DPQ = \sphericalangle APD - \sphericalangle APQ = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle PAD) - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle PAQ) = \\ = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle PAQ - \sphericalangle PAD) = \tfrac{1}{2}\sphericalangle RAQ = \tfrac{1}{2}\sphericalangle RPQ,\end{aligned}$$

czyli punkt D leży na dwusiecznej kąta RPQ. Na mocy początkowego stwierdzenia leży on też na dwusiecznej kąta PRQ. Wynika stąd teza zadania.
