LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września 2014 r. – 30 września 2014 r.)

1. Dane są takie liczby całkowite a, b i c różne od zera, że liczba
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$
jest całkowita. Wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem liczby całkowitej.

2. Dodatnie liczby całkowite x_1, x_2, ..., x_n spełniają warunek
$$x_1+x_2+\ldots+x_n=s<2n.$$
Udowodnić, że każda liczba ze zbioru $\{1,2,\ldots,s\}$ jest sumą pewnych spośród liczb x_1, x_2, ..., x_n.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $n\geqslant 1$, że liczba
$$\sqrt[n]{\sqrt{2}+1}+\sqrt[n]{\sqrt{2}-1}$$
jest wymierna.

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB\neq AC$. Punkty E i F są spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków BC i EF, a punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMN. Dowieść, że proste AQ i BC są równoległe.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2014 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (1 października 2014 r. – 3 listopada 2014 r.)

5. Rozwiązać w liczbach całkowitych x i y równanie

$$x^4 - 2x^3 + x = y^4 + 3y^2 + y.$$

6. Dany jest trójkąt ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C, a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że punkt przecięcia wysokości trójkąta AEF jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD.

7. Dany jest czworościan $ABCD$. Płaszczyzna przechodząca przez punkty styczności sfery s wpisanej w ten czworościan ze ścianami ABD, BCD i ACD przecina krawędzie AD, BD i CD odpowiednio w punktach A', B' i C'. Udowodnić, że środek sfery wpisanej w czworościan $A'B'C'D$ leży na sferze s.

8. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą k o następującej własności:

Wśród dowolnych k różnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ mających parzystą liczbę elementów istnieją dwa różne podzbiory, których część wspólna ma parzystą liczbę elementów.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 listopada 2014 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (4 listopada 2014 r. – 1 grudnia 2014 r.)

9. Nieujemne liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_n $(n \geqslant 2)$ spełniają równość $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Udowodnić, że

$$\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\cdot\Big(1+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\min\{x_i,x_j\}\Big)\geqslant 1.$$

10. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, c i d, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $an+b$ jest podzielna przez liczbę $cn+d$. Wykazać, że istnieje liczba naturalna k, dla której $a=kc$ i $b=kd$.

11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC<CA<AB$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F, a punkty K, L i M są środkami odpowiednio boków BC, CA i AB. Proste DE i KL przecinają się w punkcie P, a proste DF i KM — w punkcie Q. Dowieść, że punkty A, P i Q leżą na jednej prostej.

12. Na płaszczyźnie zaznaczono wierzchołki 2014-kąta foremnego. Dwaj gracze na przemian dorysowują nowy bok albo nową przekątną tego wielokąta. Gracz przegrywa grę, jeżeli po jego ruchu dla każdego wierzchołka v dowolne dwa spośród pozostałych wierzchołków można połączyć łamaną złożoną z narysowanych odcinków, nie przechodzącą przez wierzchołek v. Rozstrzygnąć, który z graczy — rozpoczynający grę czy jego przeciwnik — ma strategię wygrywającą.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

1 grudnia 2014 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

- Dla województwa podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`