LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

(1 września 2014 r. – 1 grudnia 2014 r.)

Zadanie **1.** Dane są takie liczby całkowite a, b i c różne od zera, że liczba

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \tag{1}$$

jest całkowita. Wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Należy dowieść, że każda liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu iloczynu abc na czynniki pierwsze z wykładnikiem podzielnym przez 3. Niech więc x, y i z będą wykładnikami, z jakimi liczba p występuje w rozkładach odpowiednio liczb a, b i c. Udowodnimy, że suma $s=x+y+z$ jest podzielna przez 3.

Oznaczmy sumę (1) symbolem k. Mnożąc ją przez abc otrzymujemy

$$a^2c+b^2a+c^2b=kabc. \tag{2}$$

Liczba pierwsza p pojawia się w rozkładach trzech składników lewej strony zależności (2) z wykładnikami równymi kolejno $2x+z$, $2y+x$ i $2z+y$. Niech m będzie najmniejszą wartością wsród tych trzech wykładników.

Jeżeli tylko jeden z tych wykładników wynosi m, to jeden składnik lewej strony związku (2) jest podzielny przez p^m, ale nie przez p^{m+1}, a pozostałe dwa składniki są podzielne przez p^{m+1}. Zatem cała lewa strona zależności (2) jest podzielna przez p^m, ale nie przez p^{m+1}. Prawa strona jest zaś podzielna przez $p^{x+y+z}=p^s$. Stąd uzyskujemy nierówność $m\geqslant s$ i sprzeczność, gdyż

$$3s=3(x+y+z)=(2x+z)+(2y+x)+(2z+y)\geqslant m+(m+1)+(m+1)>3m.$$

Wobec tego pewne dwie z liczb $2x+z$, $2y+x$ i $2z+y$ są równe (liczbie m). Przyjmijmy, bez szkody dla ogólności dowodu, że $2x+z=2y+x$. Wtedy liczba

$$s=x+y+z=x+y+z-(2x+z)+(2y+x)=3y$$

jest podzielna przez 3, co należało wykazać.

Zadanie **2.** Dodatnie liczby całkowite x_1, x_2, ..., x_n spełniają warunek

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=s<2n. \tag{1}$$

Udowodnić, że każda liczba ze zbioru $\{1,2,\ldots,s\}$ jest sumą pewnych spośród liczb x_1, x_2, ..., x_n.

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na wartość liczby n.

Dla $n=1$ teza zadania jest prawdziwa, ponieważ wówczas $x_1=s=1$.

Przechodząc do kroku indukcyjnego wybierzmy dowolną liczbę całkowitą $n>1$, dla której teza zadania jest słuszna po zastąpieniu liczby n liczbą $n-1$.

Założenie indukcyjne orzeka więc, że dla każdego układu $n-1$ dodatnich liczb całkowitych o sumie równej $t<2n-2$ wszystkie liczby ze zbioru $\{1,2,\ldots,t\}$ można zapisać w postaci sumy pewnych liczb danego układu.

W celu wykazania tezy indukcyjnej rozpatrzmy dowolne dodatnie liczby całkowite x_1, x_2, ..., x_n spełniające warunek (1). Niech m będzie największą wartością wśród tych n liczb. Jeżeli $m=1$, to każda z nich wynosi 1, a wtedy na podstawie związku $n>1$ dostajemy $s-m=n-1<2n-2$. Jeżeli natomiast $m\geqslant 2$, to z zależności $s<2n$ znów wynika, że $s-m<2n-2$.

Przenumerowując w razie potrzeby wskaźniki możemy przyjąć, że $x_n=m$. Wówczas x_1, x_2, ..., x_{n-1} są dodatnimi liczbami całkowitymi o sumie $s-m$ mniejszej od $2n-2$, czyli zgodnie z założeniem indukcyjnym dowolna liczba ze zbioru $\{1,2,\ldots,s-m\}$ jest sumą pewnych spośród liczb x_1, x_2, ..., x_{n-1}.

Wobec tego sumami pewnych spośród liczb x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n są liczby:

- 1, 2, ..., $s-m$ (sumy bez użycia liczby $x_n=m$);
- $m+1$, $m+2$, ..., s (sumy z użyciem liczby $x_n=m$),

jak również sama liczba $x_n=m$. Zatem wszystkie liczby z każdego ze zbiorów

$$\{1,2,\ldots,s-m\} \qquad \text{oraz} \qquad \{m,m+1,\ldots,s\} \tag{2}$$

można zapisać w postaci sumy pewnych spośród liczb x_1, x_2, ..., x_n.

Ponadto zbiory (2) pokrywają razem cały zbiór $\{1,2,\ldots,s\}$, gdyż słuszne są nierówności $s-m\geqslant n-1$ oraz $m\leqslant n$. Pierwsza nierówność opiera się bowiem na spostrzeżeniu, że jej lewa strona $s-m=x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}$ jest sumą $n-1$ liczb nie mniejszych niż 1; druga zaś — na pierwszej oraz na związku $s<2n$, z których otrzymujemy $m=s-(s-m)\leqslant s-(n-1)<2n-(n-1)=n+1$.

W efekcie każda liczba ze zbioru $\{1,2,\ldots,s\}$ jest sumą pewnych spośród liczb x_1, x_2, ..., x_n, co kończy indukcję i rozwiązanie zadania.

Zadanie **3.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $n\geqslant 1$, że liczba

$$\sqrt[n]{\sqrt{2}+1}+\sqrt[n]{\sqrt{2}-1}$$

jest wymierna.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczba całkowita $n\geqslant 1$ ma postulowaną własność. Wtedy z równości $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ wynika, że liczbę wymierną określoną w treści zadania można zapisać w postaci $w=a+\dfrac{1}{a}$, gdzie $a=\sqrt[n]{\sqrt{2}+1}$.

Wykażemy, że dla $k=0,1,2,\ldots$ liczba $b_k=a^k+\dfrac{1}{a^k}$ jest wymierna. W tym celu zastosujemy indukcję. Liczby $b_0=2$ i $b_1=w$ są wymierne. Niech z kolei dla pewnej liczby całkowitej $\ell\geqslant 2$ liczby $b_{\ell-2}$ i $b_{\ell-1}$ będą wymierne. Liczba

$$b_\ell=a^\ell+\frac{1}{a^\ell}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^{\ell-1}+\frac{1}{a^{\ell-1}}\right)-\left(a^{\ell-2}+\frac{1}{a^{\ell-2}}\right)=wb_{\ell-1}-b_{\ell-2}$$

jest wówczas także wymierna, co kończy rozumowanie indukcyjne.

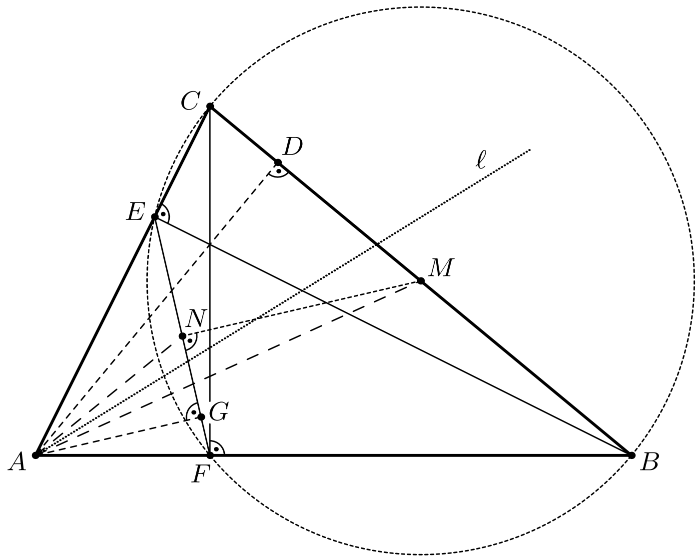
W rezultacie liczba $b_n = a^n + \frac{1}{a^n} = (\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}$ jest wymierna. Uzyskana sprzeczność świadczy o niesłuszności uczynionego przypuszczenia.

Odpowiedź: Taka liczba n nie istnieje.

Zadanie **4.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkty E i F są spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków BC i EF, a punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMN. Dowieść, że proste AQ i BC są równoległe.

Rozwiązanie

Niech D i G będą spodkami wysokości opuszczonych z wierzchołka A odpowiednio w trójkątach ABC i AEF (rys. 1).



rys. 1

Ponieważ kąty BEC i BFC są proste, więc punkty E i F leżą na okręgu o średnicy BC i środku M. Punkt N jest środkiem cięciwy EF tego okręgu, co oznacza, że prosta MN jest prostopadła do prostej EF, czyli jest równoległa do prostej AG. W konsekwencji punkt M leży wewnątrz kąta GAN oraz

$$\sphericalangle GAN = 180^\circ - \sphericalangle ANM. \tag{1}$$

Czworokąt $BCEF$ jest wpisany w okrąg. Stąd otrzymujemy związki

$$\sphericalangle AEF = 180^\circ - \sphericalangle CEF = \sphericalangle ABC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle AFE = 180^\circ - \sphericalangle BFE = \sphericalangle BCA,$$

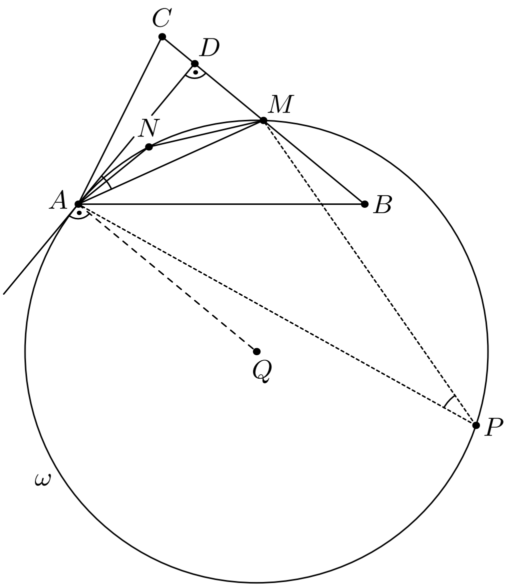
które wskazują, że trójkąty AEF i ABC są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*).

Podobieństwo φ odwzorowujące pierwszy trójkąt na drugi jest złożeniem symetrii względem dwusiecznej ℓ kąta CAB z jednokładnością o środku A

i skali $AB:AE$. Weźmy teraz pod uwagę kąty GAN i DAM — kąty między wysokością a środkową przy wierzchołku A odpowiednio w trójkątach AEF i ABC. Podobieństwo φ przekształca wysokość oraz środkową w pierwszym trójkącie odpowiednio na wysokość oraz środkową w drugim; w takim razie przekształca ono pierwszy kąt na drugi. Zatem kąty te mają jednakowe miary i możemy przepisać równość (1) w postaci

$$\sphericalangle DAM = 180^\circ - \sphericalangle ANM. \tag{2}$$

Ponadto, zgodnie z opisem podobieństwa φ, kąty GAN i DAM — a w ślad za tym półproste $AN^{\rightarrow}$ i $AM^{\rightarrow}$ jako ich odpowiednie ramiona — są symetryczne względem dwusiecznej ℓ. W efekcie podobieństwo φ przeprowadza punkt M, który leży wewnątrz kąta GAN, na pewien punkt półprostej $AN^{\rightarrow}$ położony w kącie DAM. Wobec tego punkt N znajduje się wewnątrz kąta DAM.



rys. 2

Zaznaczmy wreszcie na okręgu ω, opisanym na trójkącie AMN, dowolny punkt P leżący po przeciwnej stronie prostej AM niż punkty D i N (rys. 2). Wówczas prawa strona zależności (2) jest równa mierze kąta APM. Uzyskany w ten sposób związek $\sphericalangle DAM = \sphericalangle APM$ dowodzi, na podstawie twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą, że prosta DA jest styczna do okręgu ω, co oznacza, że jest ona prostopadła do jego promienia AQ. Jednocześnie jest ona prostopadła do boku BC trójkąta ABC, gdyż zawiera wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka A. Proste AQ i BC są więc równoległe.

Zadanie **5.** Rozwiązać w liczbach całkowitych x i y równanie

$$x^4 - 2x^3 + x = y^4 + 3y^2 + y.$$

Rozwiązanie

Niech L i P oznaczają odpowiednio lewą i prawą stronę danego równania.

Zauważmy też na wstępie, że dla dowolnej *całkowitej* liczby t słuszne są związki $t^2+t \geqslant 0$ oraz $t^2-t \geqslant 0$.

Dla $x=0$ i dla $x=1$ zachodzi równość $L=0$. Liczba $P=y^4+2y^2+(y^2+y)$ jest z kolei sumą trzech nieujemnych składników, przy czym pierwsze dwa są równe zeru jedynie dla $y=0$. Wobec tego zależność $P=0$ jest spełniona tylko dla $y=0$. W rezultacie uzyskujemy dwa rozwiązania (x,y) danego równania: $(0,0)$ i $(1,0)$, a innych rozwiązań z niewiadomą x równą 0 lub 1 nie ma.

Od tego momentu zakładamy, że liczba całkowita x jest różna od 0 i 1. Prawdziwa jest więc nierówność $x^2-x \geqslant 2$.

Korzystając z zależności $x^2-x \geqslant 2$ i $y^2-y+4 \geqslant 4$ otrzymujemy związki

$$L=(x^2-x)^2-(x^2-x)>(x^2-x)^2-2(x^2-x)+1=(x^2-x-1)^2,$$

$$P=(y^2+2)^2-(y^2-y+4)<(y^2+2)^2.$$

W konsekwencji równość $L=P$ może zachodzić jedynie wtedy, gdy

$$(x^2-x-1)^2<(y^2+2)^2.$$

Obie liczby stojące powyżej w nawiasach pod kwadratami są dodatnie. Zatem zależność $L=P$ może być spełniona jedynie pod warunkiem, że

$$x^2-x-1<y^2+2. \tag{1}$$

Podobnie, tym razem w oparciu o związki $x^2-x \geqslant 2$ i $y^2+y \geqslant 0$, dostajemy

$$L=(x^2-x)^2-(x^2-x)<(x^2-x)^2-1,$$

$$P=(y^2+1)^2+(y^2+y-1) \geqslant (y^2+1)^2-1.$$

Analogicznie wynika stąd, że równość $L=P$ jest możliwa tylko wtedy, gdy

$$x^2-x>y^2+1. \tag{2}$$

Zwiększając obie strony zależności (1) o 1 widzimy, że warunki (1) i (2) są łącznie spełnione jedynie wtedy, gdy

$$x^2-x=y^2+2. \tag{3}$$

Jeżeli teraz prawdziwa jest równość $L=P$, to słuszny jest także związek (3). Liczby stojące pod kwadratami w wykorzystanych już przedstawieniach

$$L=(x^2-x)^2-(x^2-x) \qquad \text{oraz} \qquad P=(y^2+2)^2-(y^2-y+4)$$

są więc równe, co prowadzi do zależności

$$x^2-x=y^2-y+4. \tag{4}$$

Porównując związki (3) i (4) uzyskujemy równanie $y^2+2=y^2-y+4$, skąd $y=2$. Ponadto $x^2-x=2^2+2=6$, czyli $x=3$ lub $x=-2$. Bezpośrednio sprawdzamy, że dla obu wyznaczonych przed chwilą par (x,y) zachodzi równość $L=P$.

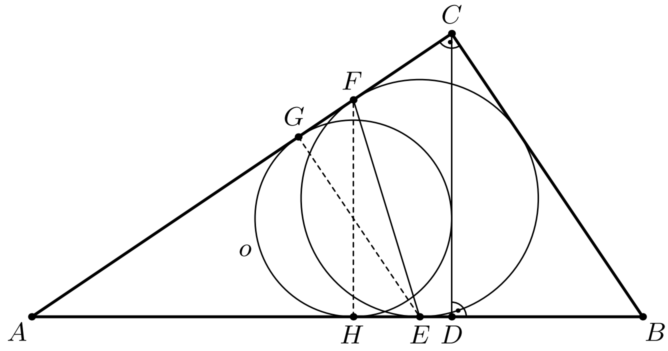
Odpowiedź: Dane równanie ma cztery rozwiązania całkowite (x,y):

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (3,2) \quad \text{oraz} \quad (-2,2).$$

Zadanie **6.** Dany jest trójkąt ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C, a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że punkt przecięcia wysokości trójkąta AEF jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD.

Rozwiązanie

Niech okrąg o wpisany w trójkąt ACD będzie styczny do boków AC i AD odpowiednio w punktach G i H (rys. 3).



rys. 3

Trójkąty prostokątne ACD i ABC są podobne, gdyż mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A. Podobieństwo odwzorowujące pierwszy trójkąt na drugi przeprowadza: wierzchołki A, C i D kolejno na wierzchołki A, B i C, okrąg o na okrąg wpisany w trójkąt ABC, a punkty styczności G i H odpowiednio na punkty styczności E i F. Stąd otrzymujemy równości stosunków

$$\frac{AG}{AE} = \frac{AC}{AB} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AH}{AF} = \frac{AD}{AC},$$

które zgodnie z twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Talesa dowodzą, że proste EG i BC są równoległe oraz proste FH i CD są równoległe.

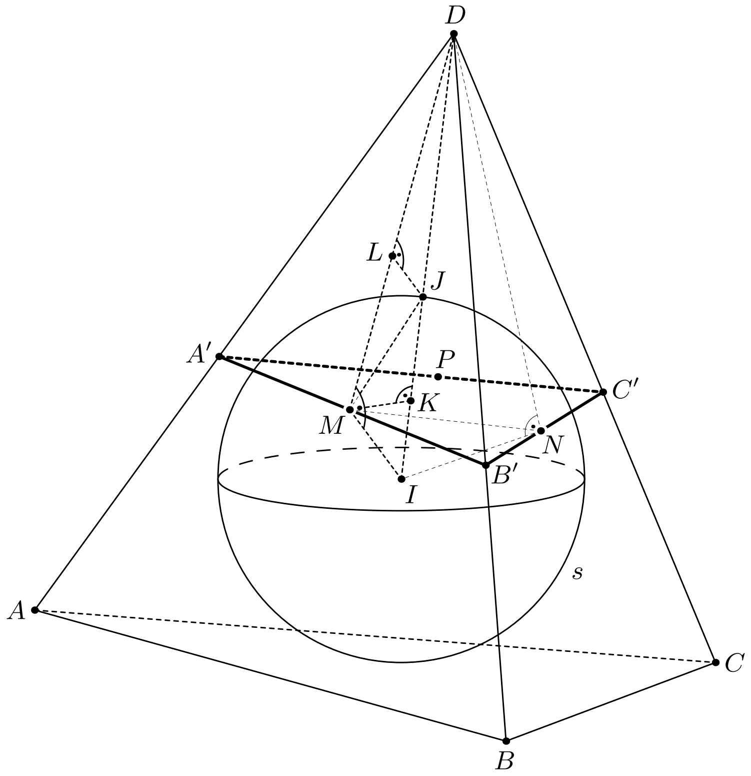
Wobec tego każda z prostych EG i FH — prostopadłych odpowiednio do prostych AC i AB — zawiera wysokość trójkąta AEF oraz przecina styczną do okręgu o pod kątem prostym w punkcie styczności, czyli przechodzi przez środek okręgu o. Zatem punkt przecięcia prostych EG i FH jest jednocześnie punktem przecięcia wysokości trójkąta AEF i środkiem okręgu o.

Zadanie **7.** Dany jest czworościan $ABCD$. Płaszczyzna przechodząca przez punkty styczności sfery s wpisanej w ten czworościan ze ścianami ABD, BCD i ACD przecina krawędzie AD, BD i CD odpowiednio w punktach A', B' i C'. Udowodnić, że środek sfery wpisanej w czworościan $A'B'C'D$ leży na sferze s.

Rozwiązanie

Oznaczmy symbolem I środek sfery s, a symbolami M, N i P — punkty jej styczności odpowiednio ze ścianami ABD, BCD i ACD. Niech następnie

J i K będą punktami, w których odcinek DI przecina odpowiednio sferę s i płaszczyznę $A'B'C'$. Oznaczmy wreszcie literą L rzut prostokątny punktu J na ścianę ABD (rys. 4).



rys. 4

Udowodnimy, że środkiem sfery wpisanej w czworościan $A'B'C'D$ jest punkt J, który na mocy samego określenia leży na sferze s.

W tym celu wykażemy najpierw, że prosta DI jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$. Istotnie, każdy z punktów D oraz I jest jednakowo odległy od obu końców odcinka MN: punkt D, gdyż DM i DN są odcinkami stycznych do sfery s poprowadzonych z jednego punktu; punkt I zaś, gdyż odcinki IM oraz IN są promieniami sfery s. Stąd punkty D oraz I — a w ślad za tym cała prosta DI — leżą na płaszczyźnie symetralnej odcinka MN. W efekcie proste MN i DI są prostopadłe. Podobnie stwierdzamy, że proste NP i PM są prostopadłe do prostej DI. Punkty M, N i P wyznaczają więc płaszczyznę prostopadłą do prostej DI, a tego dowodziliśmy.

Zatem odległość punktu J od ściany $A'B'C'$ czworościanu $A'B'C'D$ jest równa JK. Aby dokończyć rozwiązanie, należy udowodnić, że takie same są odległości punktu J od ścian $A'B'D$, $B'C'D$ oraz $A'C'D$. Uzasadnimy to dla ściany $A'B'D$; dla pozostałych dwóch ścian rozumujemy analogicznie.

Punkt M jest rzutem prostokątnym punktu I na płaszczyznę $A'B'D$. W konsekwencji punkt L — będący rzutem prostokątnym punktu J, leżącego na odcinku DI, na tę płaszczyznę — znajduje się na odcinku DM. Pozostała część dowodu rozgrywa się na płaszczyźnie DMI. Trójkąt MIJ jest równoramienny ($IM = IJ$), a proste MI oraz LJ są równoległe, ponieważ obie są prostopadłe do prostej DM. Wobec tego

$$\sphericalangle IJM = \sphericalangle IMJ = \sphericalangle LJM,$$

czyli trójkąty prostokątne MKJ i MLJ mają przy wierzchołku J kąty ostre o jednakowej mierze. Mają one też wspólną przeciwprostokątną MJ i w takim razie są przystające, skąd uzyskujemy żądany związek $JK = JL$ i tezę zadania.

Zadanie **8.** Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą k o następującej własności:
Wśród dowolnych k różnych podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ mających parzystą liczbę elementów istnieją dwa różne podzbiory, których część wspólna ma parzystą liczbę elementów.

Rozwiązanie

Zbiór o parzystej liczbie elementów będziemy krótko nazywać *zbiorem parzystym*, a zbiór o nieparzystej liczbie elementów — *zbiorem nieparzystym.* Wprowadźmy ponadto oznaczenie $S = \{1,2,\ldots,n\}$.

Niech ℓ będzie największą liczbą nieparzystą nie większą niż n. Weźmy pod uwagę ℓ różnych zbiorów powstających ze zbioru $\{1,2,\ldots,\ell\}$ po usunięciu jednego elementu. Każdy z rozważanych ℓ zbiorów ma $\ell - 1$ elementów, czyli jest zbiorem parzystym. Natomiast część wspólna dowolnych różnych dwóch spośród tych ℓ zbiorów ma $\ell-2$ elementów, a więc jest zbiorem nieparzystym. Wskazany w ten sposób przykład ℓ różnych parzystych podzbiorów zbioru S bez żądanej własności pociąga za sobą nierówność $k \geqslant \ell + 1$.

Udowodnimy, że jest ona w istocie równością. Inaczej mówiąc, wykażemy, że szukana najmniejsza wartość wynosi

$$k = \begin{cases} n, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ n+1, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases} \tag{1}$$

Przypuśćmy najpierw, że sformułowana przed chwilą teza została już udowodniona dla wszystkich parzystych wartości n. Niech n będzie liczbą nieparzystą. Wówczas $n+1$ różnych parzystych podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ traktujemy jak $n+1$ różnych parzystych podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n,n+1\}$. Liczba $n+1$ jest parzysta, więc zgodnie z uczynionym przypuszczeniem wśród danych $n+1$ zbiorów istnieją dwa różne zbiory o parzystej części wspólnej. To zaś dowodzi słuszności tezy także dla nieparzystych wartości n.

Pozostaje teraz dowieść następującego zdania:

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to wśród dowolnych różnych parzystych podzbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S$ pewne dwa różne podzbiory mają parzystą część wspólną.

Dowód będzie oparty na pojęciu różnicy symetrycznej. Dla dowolnych zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset S$ określamy różnicę symetryczną $X_1 \triangle X_2 \triangle \ldots \triangle X_m$ jako podzbiór zbioru S złożony z wszystkich tych elementów, które należą do nieparzystej liczby spośród zbiorów X_1, X_2, ..., X_m. Wykażemy, że

jeżeli zbiory X_1, X_2, ..., X_m mają odpowiednio x_1, x_2, ..., x_m elementów, to zbiór $X = X_1 \triangle X_2 \triangle \ldots \triangle X_m$ jest parzysty wtedy i tylko wtedy, gdy suma $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ jest parzysta.

Niech bowiem liczby 1, 2, ..., n należą odpowiednio do y_1, y_2, ..., y_n zbiorów występujących w ciągu X_1, X_2, ..., X_m. Wówczas dowolna liczba $i \in S$ należy do zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy liczba y_i jest nieparzysta. W rezultacie zbiór X jest parzysty wtedy i tylko wtedy, gdy liczba nieparzystych składników sumy $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ jest parzysta, czyli gdy cała suma jest parzysta. Wynika stąd zapowiedziane stwierdzenie, gdyż obliczając dwoma sposobami liczbę par postaci (X_j, i), w których $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz liczba $i \in S$ należy do zbioru X_j, otrzymujemy zależność

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = y_1 + y_2 + \ldots + y_n.$$

Przystępujemy do kluczowego kroku rozwiązania. Udowodnimy, że:

Różnica symetryczna niektórych spośród zbiorów A_1, A_2, ..., A_n jest zbiorem pustym. Innymi słowy, istnieją: liczba $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz r-elementowy zbiór $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset S$, dla których

$$A_{i_1} \triangle A_{i_2} \triangle \ldots \triangle A_{i_r} = \emptyset.$$

Przed przejściem do dowodu zauważmy, że na mocy określenia różnicy symetrycznej zbiór $A_{i_1} \triangle A_{i_2} \triangle \ldots \triangle A_{i_r}$ nie zależy od wyboru kolejności wskaźników i_1, i_2, ..., i_r i w efekcie jest wyznaczony jednoznacznie przez podzbiór I.

Ponieważ zbiory A_1, A_2, ..., A_n są parzyste, więc na podstawie wykazanego wyżej stwierdzenia każdemu z $2^n - 1$ niepustych zbiorów $I \subset S$ odpowiada różnica symetryczna będąca parzystym podzbiorem zbioru S. Jednak zbiór S ma mniej niż $2^n - 1$ parzystych podzbiorów — ma mianowicie więcej niż jeden podzbiór nieparzysty, w tym n podzbiorów jednoelementowych. Wobec tego istnieją dwa różne podzbiory: p-elementowy podzbiór $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \subset S$ oraz q-elementowy podzbiór $J' = \{j'_1, j'_2, \ldots, j'_q\} \subset S$, którym odpowiada taka sama różnica symetryczna R.

Rozpatrzmy następujący ciąg $p + q$ zbiorów:

$$A_{j_1},\ A_{j_2},\ \ldots,\ A_{j_p},\ A_{j'_1},\ A_{j'_2},\ \ldots,\ A_{j'_q}. \tag{2}$$

Dowolna liczba ze zbioru R należy do nieparzystej liczby z początkowych p zbiorów i do nieparzystej liczby z końcowych q zbiorów. Dowolna spośród pozostałych liczb ze zbioru S należy zaś do parzystej liczby z początkowych p zbiorów i do parzystej liczby z końcowych q zbiorów. Zatem różnica symetryczna wszystkich $p + q$ zbiorów (2) jest zbiorem pustym.

Podzielmy wskaźniki ze zbiorów J i J' na dwa typy: wskaźniki należące do obu zbiorów i wskaźniki należące tylko do jednego z nich. W myśl relacji $J \neq J'$ istnieje co najmniej jeden wskaźnik drugiego typu. Niech i_1, i_2, ..., i_r oznaczają wszystkie wskaźniki drugiego typu, wypisane jednokrotnie. Zbiory A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_r} występują jeden raz w ciągu (2), a dla każdego wskaźnika i pierwszego typu zbiór A_i występuje dwukrotnie. Po wykreśleniu z ciągu (2) wszystkich powstających w ten sposób par jednakowych zbiorów dostajemy krótszy ciąg zbiorów o takiej samej różnicy symetrycznej. W konsekwencji

$$A_{i_1} \triangle A_{i_2} \triangle \ldots \triangle A_{i_r} = A_{j_1} \triangle A_{j_2} \triangle \ldots \triangle A_{j_p} \triangle A_{j'_1} \triangle A_{j'_2} \triangle \ldots \triangle A_{j'_q} = \emptyset,$$

czyli zbiór $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ ma własność żądaną w tezie kluczowego kroku.

Aby wreszcie dokończyć rozwiązanie zbadamy dwa przypadki. Symbole i_1, i_2, ..., i_r będą nadal oznaczać takie wskaźniki, że $A_{i_1} \triangle A_{i_2} \triangle \ldots \triangle A_{i_r} = \emptyset$.

Przypadek **1.** r jest liczbą parzystą.

Każda liczba ze zbioru S, i w szczególności każda liczba ze zbioru A_{i_1}, należy do parzystej liczby ze zbiorów A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_r}. W takim razie dowolna liczba ze zbioru A_{i_1} należy do parzystej liczby ze zbiorów

$$(3) \qquad A_{i_1}, \quad A_{i_1} \cap A_{i_2}, \quad A_{i_1} \cap A_{i_3}, \quad \ldots, \quad A_{i_1} \cap A_{i_r}$$

i jest to też prawdą dla liczb spoza zbioru A_{i_1}, gdyż nie należą one do żadnego ze zbiorów (3). W rezultacie różnica symetryczna r zbiorów (3) jest zbiorem pustym. Różnica symetryczna zbioru parzystego i $r-1$ zbiorów nieparzystych jest jednak nieparzysta. Co najmniej jedna spośród części wspólnych $A_{i_1} \cap A_{i_j}$ dla $j = 2, 3, \ldots, r$ jest więc zbiorem parzystym.

Przypadek **2.** r jest liczbą nieparzystą.

Wtedy $r \neq n$, ponieważ n jest liczbą parzystą. Stąd istnieje wskaźnik $i \in S$ różny od każdego ze wskaźników i_1, i_2, ..., i_r. Podobnie jak w przypadku **1** wnioskujemy z równości $A_{i_1} \triangle A_{i_2} \triangle \ldots \triangle A_{i_r} = \emptyset$, że

$$(A_i \cap A_{i_1}) \triangle (A_i \cap A_{i_2}) \triangle \ldots \triangle (A_i \cap A_{i_r}) = \emptyset.$$

Różnica symetryczna r zbiorów nieparzystych jest nieparzysta. Zatem znów dla pewnego $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ część wspólna $A_i \cap A_{i_j}$ jest zbiorem parzystym.

Odpowiedź: Szukana najmniejsza liczba k jest opisana wzorem (1).

Zadanie **9.** Nieujemne liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_n ($n \geqslant 2$) spełniają równość $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Udowodnić, że

$$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cdot \Big(1 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \min\{x_i, x_j\}\Big) \geqslant 1.$$

Rozwiązanie

Wykażemy ogólniejsze stwierdzenie: dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, ..., x_n prawdziwa jest zależność

$$(1) \quad \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \min\{x_i, x_j\}\Big) \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2.$$

Podstawiając do niej dwukrotnie warunek $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ otrzymamy wprost tezę zadania.

Aby udowodnić związek (1) przedstawmy jego lewą stronę L i prawą stronę P w następujący sposób:

$$L=\sum_{i=1}^{n}\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\cdot x_i+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\cdot\min\{x_i,x_j\},$$

$$P=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_i\cdot x_j.$$

W celu wykazania żądanej nierówności $L\geqslant P$ wystarczy teraz uzasadnić, że każdy składnik pierwszej z dwóch sum występujących powyżej w liczbie L jest nie mniejszy niż odpowiedni składnik pierwszej z dwóch sum występujących w liczbie P, oraz postąpić analogicznie dla drugich sum.

Pierwszy z opisanych przed chwilą kroków sprowadza się do zależności

$$\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\cdot x_i\geqslant x_i^2 \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,n,$$

które są prawdziwe, gdyż w i-tej zależności $(i=1,2,\ldots,n)$ pierwszy czynnik iloczynu stojącego po lewej stronie jest nie mniejszy niż x_i. Z kolei drugi krok przybiera postać związków

$$\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\cdot\min\{x_i,x_j\}\geqslant x_i\cdot x_j \qquad \text{dla } 1\leqslant i<j\leqslant n,$$

które również są słuszne dla dowolnej pary wskaźników $1\leqslant i<j\leqslant n$, ponieważ w każdym związku pierwszy i drugi czynnik lewej strony są nie mniejsze niż odpowiednio większy i mniejszy czynnik prawej strony.

To dowodzi nierówności (1), która — jak wiemy — pociąga za sobą tezę.

Zadanie **10.** Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, c i d, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $an+b$ jest podzielna przez liczbę $cn+d$. Wykazać, że istnieje liczba naturalna k, dla której $a=kc$ i $b=kd$.

Rozwiązanie

Zgodnie z warunkami zadania, dla każdego $n\geqslant 1$ liczby $cn+d$ i $an+b$ są podzielne przez $cn+d$, czyli liczba

$$a(cn+d)-c(an+b)=ad-bc$$

także jest podzielna przez $cn+d$. Zatem liczba całkowita $ad-bc$ jest podzielna przez dowolnie duże liczby naturalne i wobec tego $ad-bc=0$. Przedstawmy otrzymany w ten sposób związek $ad=bc$ jako równość ułamków

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

i oznaczmy ich wspólną wartość symbolem k. Spełnione są więc zależności

$$a=kc \qquad \text{oraz} \qquad b=kd.$$

Ponadto w myśl założeń zadania dla $n=1$ liczba $a+b=k(c+d)$ jest podzielna przez $c+d$. W rezultacie k jest liczbą całkowitą, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **11.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC < CA < AB$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F, a punkty K, L i M są środkami odpowiednio boków BC, CA i AB. Proste DE i KL przecinają się w punkcie P, a proste DF i KM — w punkcie Q. Dowieść, że punkty A, P i Q leżą na jednej prostej.

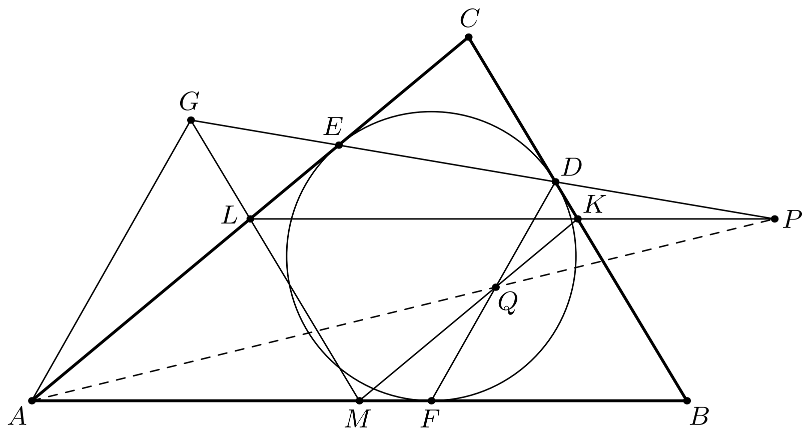
Rozwiązanie

Korzystając z równości $AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$ obliczamy, że

$$AE = \tfrac{1}{2}(AE+AF) = \tfrac{1}{2}(AE+CE-CD+AF+BF-BD) = \tfrac{1}{2}(AC+AB-BC).$$

Stąd i z warunku $AB > BC$ dostajemy $AE > \frac{1}{2}AC = AL$. Zatem punkt L leży bliżej punktu A niż punkt E, a różnica między obiema odległościami wynosi

(1) $$LE = AE - AL = \tfrac{1}{2}(AC + AB - BC) - \tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{2}(AB - BC).$$



rys. 5

Niech G będzie punktem przecięcia prostych DE i ML (rys. 5). Ponieważ proste BC i ML są równoległe, więc trójkąty DCE i GLE są jednokładne względem punktu E. Wobec tego związek $CD = CE$ wskazuje, że

(2) $$LG = LE.$$

Z kolei punkty D i E leżą odpowiednio na podstawie BC i ramieniu CL trapezu $BCLM$, czyli punkt G znajduje się na półprostej $ML^{\rightarrow}$ na zewnątrz trójkąta ABC. Łącząc teraz zależności (2) i (1) stwierdzamy, że

$$MG = ML + LG = ML + LE = \tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}(AB - BC) = \tfrac{1}{2}AB = MA.$$

W konsekwencji trójkąt AMG jest równoramienny. Ponadto jego ramiona są równoległe do ramion trójkąta równoramiennego FBD, co dowodzi, że równoległe są też podstawy AG i FD obu rozważanych trójkątów.

Z drugiej strony, proste AL i MG są równoległe odpowiednio do prostych MK i BC. Zatem boki trójkąta ALG są równoległe do boków trójkąta QKD.

Stąd oba trójkąty są jednokładne lub przystające, a trzy proste, przechodzące przez wierzchołek pierwszego trójkąta i odpowiadający wierzchołek drugiego, przecinają się w jednym punkcie (środku jednokładności) lub są równoległe. Dwie z nich — proste LK i GD — przecinają się w punkcie P. W rezultacie trzecia prosta AQ również przechodzi przez punkt P, co należało wykazać.

Zadanie **12.** Na płaszczyźnie zaznaczono wierzchołki 2014-kąta foremnego. Dwaj gracze na przemian dorysowują nowy bok albo nową przekątną tego wielokąta. Gracz przegrywa grę, jeżeli po jego ruchu dla każdego wierzchołka v dowolne dwa spośród pozostałych wierzchołków można połączyć łamaną złożoną z narysowanych odcinków, nie przechodzącą przez wierzchołek v. Rozstrzygnąć, który z graczy — rozpoczynający grę czy jego przeciwnik — ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie

Wierzchołki danego 2014-kąta będziemy krótko nazywać *punktami*, jego boki i przekątne zaś — *odcinkami* (bez względu na to, czy są narysowane).

Układ odcinków nazwiemy: *ukończonym*, jeżeli dla dowolnego punktu v każdą parę pozostałych punktów można połączyć łamaną złożoną z odcinków danego układu omijającą punkt v, a *przegranym*, jeżeli nie jest ukończony, lecz dodanie doń dowolnego nowego odcinka przekształca go w układ ukończony.

Jeżeli układ narysowanych w bieżącej chwili odcinków jest przegrany, to gra jeszcze się toczy, jednak gracz, który ma wykonać ruch, po jego wykonaniu doprowadza do powstania układu ukończonego i przegrywa grę.

Rozwiązanie zadania będzie oparte na bliższym zbadaniu możliwej liczby odcinków w układzie przegranym.

Niech P będzie dowolnym układem przegranym. Należące doń odcinki będziemy krótko nazywać *P-odcinkami*, a łamane zbudowane z P-odcinków — *P-łamanymi*. Układ P nie jest ukończony, więc istnieją takie trzy różne punkty a, b i v, że każda P-łamana o końcach a i b przechodzi przez punkt v.

Oznaczmy symbolem A zbiór wszystkich punktów dających się połączyć z punktem a pewną P-łamaną, na której nie leży punkt v. Sam punkt a także zaliczamy do zbioru A. Podobnie, zamieniając punkt a na punkt b, określamy zbiór B. Punkt v nie należy do żadnego ze zbiorów A i B.

Zbiory A i B nie mają punktów wspólnych. Rzeczywiście, jakikolwiek punkt wspólny tych zbiorów można by połączyć P-łamaną omijającą punkt v zarówno z punktem a, jak i z punktem b. Łącząc obie te łamane w P-łamaną o końcach a i b dostalibyśmy wtedy sprzeczność z wyborem punktów a, b i v.

Wykażemy teraz cztery własności, wyrażone w następujących zdaniach:

1. *Dowolne dwa różne punkty ze zbioru A są połączone P-odcinkiem. Analogiczna teza jest słuszna dla zbioru B.*
2. *Żaden P-odcinek nie łączy punktu ze zbioru A z punktem ze zbioru B.*
3. *Punkt v jest połączony P-odcinkiem z każdym innym punktem.*
4. *Każdy punkt różny od punktu v należy do jednego ze zbiorów A i B.*

Dowód zdania **1.** Przypuśćmy, że różne punkty $a_1, a_2 \in A$ nie są połączone P-odcinkiem. Zgodnie z określeniem zbioru A każdy z punktów a_1 i a_2 można połączyć z punktem a pewną P-łamaną, na której nie leży punkt v. Zatem punkty a_1 i a_2 też można połączyć taką P-łamaną, którą oznaczymy literą ℓ.

Weźmy pod uwagę układ P' powstający z układu P po dodaniu odcinka o końcach a_1 i a_2. Układ P' jest ukończony, więc istnieje łamana ℓ' złożona z odcinków układu P', łącząca punkty a i b bez przechodzenia przez punkt v. Zastępując w łamanej ℓ' każdy odcinek o końcach a_1 i a_2 łamaną ℓ uzyskujemy P-łamaną łączącą punkty a i b oraz omijającą punkt v, czyli sprzeczność.

Dowód zdania **2.** Załóżmy, że punkty $a' \in A$ i $b' \in B$ są końcami jednego P-odcinka. Na mocy zdania **1** punkty a i a' są końcami jednego P-odcinka (o ile $a' \neq a$) oraz punkty b i b' są końcami jednego P-odcinka (o ile $b' \neq b$). Stąd otrzymujemy P-łamaną o końcach a i b, zbudowaną z co najwyżej trzech P-odcinków oraz nie przechodzącą przez punkt v — znów sprzeczność.

Dowód zdania **3.** Gdyby punkt v nie był połączony P-odcinkiem z innym punktem c, to układ powstający z układu P po dodaniu odcinka o końcach v i c powinien być ukończony.

Tymczasem wciąż nie istnieje łamana o końcach a i b omijająca punkt v. Dodany odcinek o jednym końcu v nie może mianowicie wejść w skład takiej łamanej; nie można jej również utworzyć z samych P-odcinków.

Dowód zdania **4.** Przypuśćmy, że punkt $d \neq v$ nie należy do żadnego ze zbiorów A i B. W myśl założenia $d \notin A$ odcinek o końcach a i d nie należy do układu P. Dodając ten odcinek do układu P dostajemy układ ukończony P'.

Niech ℓ będzie łamaną złożoną z odcinków układu P', łączącą punkty a i b z pominięciem punktu v. Wybierając w razie potrzeby pewien jej krótszy fragment przyjmijmy, że punkt a leży na łamanej ℓ tylko raz — jako jej koniec.

Co najmniej jeden z odcinków łamanej ℓ nie należy do układu P. Wobec tego znajduje się na niej odcinek o końcach a i d. Występuje on jednak tylko raz i przylega do końca a łamanej ℓ. Wszystkie pozostałe odcinki łamanej ℓ są P-odcinkami. W konsekwencji punkty d i b można połączyć P-łamaną omijającą punkt v. To przeczy warunkowi $d \notin B$ i kończy dowód zdania **4**.

Przystępujemy wreszcie do wyznaczenia liczby P-odcinków.

Niech k i n oznaczają liczby punktów należących odpowiednio do zbiorów A i B. Zdania **1**–**4** wskazują, że $k+n=2013$, a wszystkimi P-odcinkami są: odcinki o obu końcach w $(k+1)$-elementowym zbiorze $A \cup \{v\}$ i odcinki o obu końcach w $(n+1)$-elementowym zbiorze $B \cup \{v\}$. W efekcie liczba wszystkich P-odcinków wynosi

$$\tfrac{1}{2}k(k+1)+\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{2}[k(k+1)+(2013-k)(2014-k)]=$$
$$=\tfrac{1}{2}(2k^2-4026k+2013\cdot 2014)=k(k-2013)+2013\cdot 1007$$

i jest nieparzysta, gdyż jeden z czynników iloczynu $k(k-2013)$ jest parzysty. Zatem *dowolny układ przegrany składa się z nieparzystej liczby odcinków.*

Jeżeli kolej wykonania ruchu przypada na gracza R rozpoczynającego grę, to liczba odcinków narysowanych w tym momencie na płaszczyźnie jest parzysta, czyli na podstawie konkluzji poprzedniego akapitu nie tworzą one układu przegranego. Wynika stąd, że w każdym swoim ruchu gracz R może wybrać do dorysowania taki odcinek, że po jego dorysowaniu gra jeszcze się nie zakończy. W rezultacie strategia gracza R, polegająca na dorysowywaniu za każdym razem *dowolnego* nowego odcinka, które nie powoduje przegranej natychmiast po wykonaniu ruchu, jest strategią wygrywającą. Rozpatrywana gra zawsze kończy się bowiem przegraną jednego z graczy, ponieważ układ wszystkich boków i przekątnych danego 2014-kąta jest ukończony.

Odpowiedź: Strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający grę.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`