LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2015 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Punkty E, F, G leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, przy czym $2AG = GB$, $2BE = EC$ oraz $2CF = FA$. Punkty P i Q leżą na odcinkach EG i FG odpowiednio, przy czym $2EP = PG$ oraz $2GQ = QF$. Udowodnić, że czworokąt $AGPQ$ jest równoległobokiem.

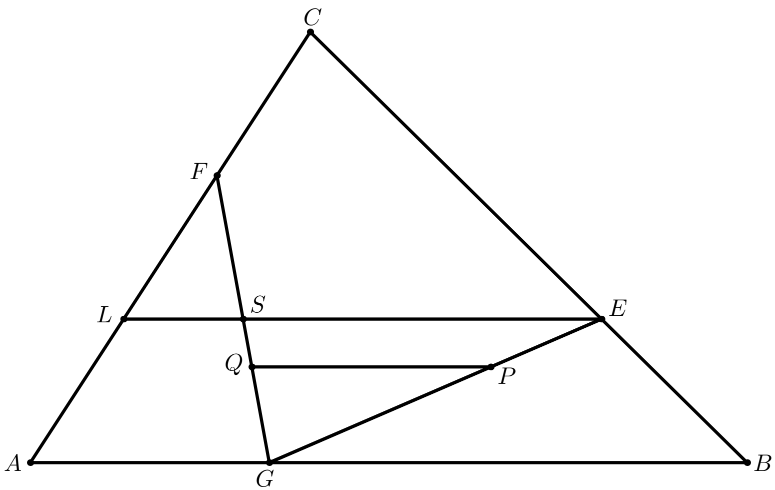
Rozwiązanie

Oznaczmy przez L, S odpowiednio środki odcinków FA, FG. Wówczas $LS \| AG$ oraz $LS = \frac{1}{2}AG$; dalej, $CL = \frac{2}{3}CA$, $CE = \frac{2}{3}CB$; stąd $LE \| AB$ oraz $LE = \frac{2}{3}AB = 2\,AG$. Wreszcie $GQ = \frac{2}{3}GS$, $GP = \frac{2}{3}GE$; stąd $QP \| SE$ oraz $QP = \frac{2}{3}SE$.

Punkty L, S, E są współliniowe; tak samo punkty A, G, B. Uzyskane równoległości dają wniosek, że $QP \| AG$. Ponadto

$$QP = \frac{2}{3}SE = \frac{2}{3}(LE - LS) = \frac{2}{3}(2\,AG - \frac{1}{2}AG) = AG.$$

Z tych zależności już wynika, że $AGPQ$ to równoległobok.



Zadanie **2.** Dana jest liczba naturalna $A > 1$. Niech $a_1 = A^A$, $a_{n+1} = A^{a_n}$, $b_1 = A^{A+1}$, $b_{n+1} = 2^{b_n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$a_n < b_n\,.$$

Rozwiązanie

Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami naturalnymi większymi od 1. Stąd dla $n \geqslant 2$ mamy $a_n = A^{a_{n-1}} \geqslant A^2 \geqslant 2^2$. Ponieważ także $a_1 = A^A \geqslant 2^2$, widzimy, że $a_n \geqslant 4$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Udowodnimy tezę silniejszą niż wymagana w zadaniu. Pokażemy indukcyjnie, że dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ zachodzi nierówność

$$Aa_n \leqslant b_n. \tag{1}$$

Dla $n = 1$ jest tu równość. Ustalmy $n \geqslant 1$, przyjmijmy słuszność (1) dla tej liczby n i starajmy się wykazać tezę indukcyjną $Aa_{n+1} \leqslant b_{n+1}$, zapisując ją równoważnie jako

$$A^{a_n+1} \leqslant 2^{b_n}. \tag{2}$$

Skoro $a_n \geqslant 4$, to $a_n + 1 = a_n(1 + a_n^{-1}) \leqslant a_n(1 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{4}a_n$, skąd $A^{a_n+1} \leqslant A^{(5/4)a_n}$. Jednocześnie (z założenia indukcyjnego) $2^{b_n} \geqslant 2^{Aa_n}$. Udowodnimy nierówność (2), jeśli pokażemy, że $(A^{5/4})^{a_n} \leqslant (2^A)^{a_n}$, czyli że $A^{5/4} \leqslant 2^A$, czyli

$$2^{-A} \cdot A^{5/4} \leqslant 1. \tag{3}$$

Jest to prawda dla $A = 2$; dalej zaś, przy zwiększeniu liczby naturalnej A o jedynkę, wartość wyrażenia po lewej stronie (3) maleje:

$$\frac{2^{-(A+1)} \cdot (A+1)^{5/4}}{2^{-A} \cdot A^{5/4}} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{A}\Big)^{5/4} \leqslant \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}\Big)^{5/4} = \Big(\frac{3^5}{2^9}\Big)^{1/4} < 1.$$

Stąd słuszność pomocniczej nierówności (3), więc i tezy indukcyjnej (2). Na mocy zasady indukcji, nierówność (1) zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Nierówność $a_n < b_n$ wynika z (1) natychmiast.

Zadanie **3.** Rozważmy ciąg $a_n = |n(n+1) - 19|$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dla dowolnego $n \neq 4$ wykazać, że:
jeśli dla każdego $k < n$ liczby a_k i a_n są względnie pierwsze, to a_n jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie

Odrzucając symbol wartości bezwzględnej, oznaczmy

$$c_n = n(n+1) - 19;$$

tak więc $a_n = \pm c_n$. Sprawdzamy, że a_0, a_1, a_2, a_3 są liczbami pierwszymi, zaś $a_4 = 1$.

Weźmy dowolny wyraz a_n badanego ciągu, będący liczbą złożoną ($n > 4$, więc $a_n = c_n > 1$). Należy wykazać, że a_n ma wspólny dzielnik $d > 1$ z co najmniej jedną liczbą spośród $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Jest to równoważne stwierdzeniu, że c_n ma wspólny dzielnik $d > 1$ z pewną liczbą spośród $c_0, \ldots, c_{n-1}$.

Niech d będzie najmniejszym dzielnikiem liczby c_n, większym od 1. Iloraz c_n/d też jest jej dzielnikiem, większym od 1; zatem $d \leqslant c_n/d$, czyli $d^2 \leqslant c_n = n(n+1) - 19 < (n+1)^2$. Stąd $d \leqslant n$. W takim razie $k = n - d \in \{0, \ldots, n-2\}$. Różnica

$$c_n - c_k = n(n+1) - k(k+1) = (n-k)(n+k+1) = d(2n-d+1)$$

dzieli się przez d. Tak więc d jest wspólnym dzielnikiem liczb c_n i c_k ($= c_{n-d}$), i mamy to, o co chodziło.

LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2015 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3, x_4 są miejscami zerowymi wielomianu czwartego stopnia $W(x)$ o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeśli $x_3 + x_4$ jest liczbą wymierną a x_3x_4 jest liczbą niewymierną, to $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

Rozwiązanie

Oznaczmy: $A = x_1 + x_2,\ B = x_3 + x_4,\ P = x_1x_2,\ R = x_3x_4$. Niech

$$W(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i = a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Wymnażając i przyrównując współczynniki, uzyskujemy związki (zwane *wzorami Viète'a*)

$$\begin{aligned}
-\frac{a_3}{a_4} &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = A + B,\\
\frac{a_2}{a_4} &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = AB + P + R,\\
-\frac{a_1}{a_4} &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = AR + BP,\\
\frac{a_0}{a_4} &= x_1x_2x_3x_4 = PR.
\end{aligned}$$

Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Z założenia, $B \in \mathbb{Q},\ R \notin \mathbb{Q}$. Stąd i z pierwszego, a następnie drugiego równania, wnosimy, że $A \in \mathbb{Q}$, $P + R \in \mathbb{Q}$. Zatem $P \notin \mathbb{Q}$. Trzecie równanie mówi, że $AR + BP \in \mathbb{Q}$. Wobec tego

$$(A - B)P = A(P + R) - (AR + BP) \in \mathbb{Q}.$$

Skoro zaś $A - B \in \mathbb{Q}$, $P \notin \mathbb{Q}$, iloczyn $(A - B)P$ należy do $\mathbb{Q}$ tylko wtedy, gdy $A - B = 0$. Ta równość jest tezą zadania.

Zadanie **5.** Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą.
Wyznaczyć liczbę takich ciągów $a_0, a_1, \ldots, a_n$ o wyrazach w zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$, że
$$n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^n a_n.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że w napisanym wzorze ograniczenie (do n) wykładników potęg dwójki nie ma znaczenia. Jeśli bowiem zachodzi równość

$$n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^N a_N, \quad \text{gdzie } N \geqslant n,$$

to wszystkie współczynniki a_i o numerach $i > n$ są zerami (bo $2^{n+1} > n$) – odrzucając te składniki, dostajemy wyrażenie, jak w treści zadania. Tak więc liczba, o którą pyta zadanie – oznaczmy ją przez $F(n)$ – to po prostu liczba przedstawień n w postaci kombinacji potęg dwójki o dowolnych wykładnikach całkowitych nieujemnych i o współczynnikach równych 0, 1, 2 lub 3.

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $a_0 = 1$ lub 3. Zamieniając ten współczynnik (odpowiednio) na 0 lub 2 dostajemy przedstawienie liczby $n-1$; na odwrót, z przedstawienia liczby parzystej n dostajemy (przez zwiększenie o 1 współczynnika a_0) przedstawienie liczby $n+1$. Zatem

$$(1) \qquad F(2k+1) = F(2k) \quad \text{dla każdego } k \geqslant 1.$$

Niech teraz $n \geqslant 4$ będzie liczbą parzystą; $n = 2k$. Weźmy dowolne jej przedstawienie w postaci danej w zadaniu; oczywiście $a_0 = 0$ lub 2. Suma
$$a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \ldots + 2^{n-1}a_n$$

jest wówczas dopuszczalnym przedstawieniem liczby $\frac{1}{2}(n - a_0)$, równej k, gdy $a_0 = 0$, bądź równej $k-1$, gdy $a_0 = 2$ (niektóre potęgi dwójki przekraczają k, ale to nieistotne, w myśl uwagi uczynionej na wstępie).

Tak więc każde przedstawienie liczby $2k$ w wymaganej formie powstaje z pewnego przedstawienia liczby k (przez pomnożenie przez 2 i dołączenie składnika $a_0 = 0$), bądź też z pewnego przedstawienia liczby $k-1$ (przez pomnożenie przez 2 i dołączenie składnika $a_0 = 2$). Wynika stąd zależność rekurencyjna

$$(2) \qquad F(2k) = F(k) + F(k-1) \quad \text{dla każdego } k \geqslant 2.$$

Łatwo znaleźć wartości bazowe $F(1) = 1$, $F(2) = F(3) = 2$. Obliczając kilka następnych wartości, odgadujemy wzór jawny

$$(3) \qquad F(2k+1) = F(2k) = k+1; \quad \text{równoważnie: } F(n) = \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Wystarczy wykazać, że funkcja $F(n)$, *określona* wzorem (3), spełnia zależność (2). Sprowadza się to do prościutkiego sprawdzenia równości $k+1 = \big(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\big) + \big(\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + 1\big)$. Jej prawa strona to $\big(\frac{k}{2} + 1\big) + \big(\frac{k-2}{2} + 1\big)$ dla k parzystych oraz $\big(\frac{k-1}{2} + 1\big) + \big(\frac{k-1}{2} + 1\big)$ dla k nieparzystych. W obu przypadkach jest to liczba $k + 1$. To dowodzi słuszności wzoru (3), który daje odpowiedź na postawione pytanie.

Zadanie **6.** Dany jest trójkąt ABC. Punkt K jest środkiem boku BC, punkt M leży wewnątrz boku AB. Prosta KM przecina prostą AC w takim punkcie L, że punkt C leży między A i L. Punkt N jest środkiem odcinka LM. Prosta AN przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Wykazać, że jeśli $S \neq N$, to okrąg przechodzący przez punkty K, N i S jest styczny do prostej BC.

Rozwiązanie

Najpierw pokażemy, że punkt N leży między punktami K i L. Niech J będzie punktem symetrycznym do M względem punktu K. Trójkąty KBM i KCJ są przystające. Zatem

$$\sphericalangle ACJ = \sphericalangle ACB + \sphericalangle KCJ = \sphericalangle ACB + \sphericalangle KBM < 180^\circ.$$

Stąd wynika, że J leży między K i L, czyli $KL > KJ = KM$, i w konsekwencji środek N odcinka ML znajduje się na odcinku KL. Mamy więc konfigurację, jak na rysunku: punkty A i N leżą po przeciwnych stronach prostej BC (natomiast uporządkowanie punktów A, N, S na prostej AN może być różne).

Niech P będzie punktem symetrycznym do A względem punktu N; tworzy się równoległobok $AMPL$. Mamy równości kątów wpisanych w okrąg (ABC):

$$\sphericalangle SCB = \sphericalangle SAB = \sphericalangle PAM, \qquad \sphericalangle SBC = \sphericalangle SAC = \sphericalangle APM$$

(ostatnia równość wynika z równoległości $AL \| MP$). Trójkąty BSC i PMA są więc podobne. Podobieństwo, które przekształca pierwszy z tych trójkątów na drugi, przenosi środek K boku BC na środek N boku PA. Stąd wynika podobieństwo trójkątów SKC i MNA, i w następstwie – równość

$$\sphericalangle SKC = \sphericalangle MNA = \sphericalangle KNA = \begin{cases} 180^\circ - \sphericalangle KNS & \text{przy kolejności } A, N, S, \\ \sphericalangle KNS & \text{przy kolejności } A, S, N. \end{cases}$$

Weźmy pod uwagę okrąg, przechodzący przez punkty K, N, S. Punkty A i C leżą po jednej stronie prostej KN. Niezależnie od kolejności punktów A, N, S, uzyskana równość prowadzi (na podstawie twierdzenia o stycznej i cięciwie) do wniosku, że prosta AC jest styczna do tego okręgu.